This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Google

Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.
+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.
+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.
+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`

1817
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
35
.C41

1817
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

QA
35
.C41

I.P. Canals inv. et delin. Franciscus Boix Sculp. Barcinone Anno 1758.

LICIONES
DE MATHEMATICA,
O
ELEMENTOS GENERALES
DE ARITHMETICA,
Y
ALGEBRA
PARA EL USO DE LA CLASE,

POR EL P. THOMAS ÇERDA
de la Compañia de Jesus,
Professor Real de Mathematicas en Barcelona
En el Colegio de Nobles de Santiago
de Cordellas.

TOMO PRIMERO.

ÇON PRIVILEGIO DEL REI NUESTRO SEÑOR.

BARCELONA.

Por FRANCISCO SURIÀ, Impressor de la Real Academia
de Buenas Letras de dicha Ciudad. Año 1758.

Y

Mathematics
Wahe
7-30-26
13622

AL MUI ILUSTRE

AYUNTAMIENTO

DE LA CIUDAD DE BARCELONA.

MUI ILUSTRE SEÑOR.

SIendo esta la primera Obra, que da al Público esta Clase de

Mathematicas, que por propension de su Amor à los Naturales de este Principado, se ha dignado Su Mag$^{d.}$, à solicitud de V. S$^{a.}$, erigir en esta Ciudad de Barcelona, dotandola de suerte, que pueda perpetuizarse su enseñanza, es mui justo, que presente Yo la tal Obra à V. S$^{a.}$, ya para mostrar mi agradecimiento à lo que V. S$^{a.}$ tanto ha contribuido, ya tambien por haberse trabajado con el fin principal de servir al Bien Publico del Estado

en una Ciencia, que en el dia es las Delicias de la Europa. *Siempre han tenido en V. Sa. ſu proteccion, y acogimiento las Ciencias, y Buenas Artes, lo que ha elevado à V. Sa. à tan ſublime grado de honor, como es notorio al Mundo todo, y ſería corto eſte Librito aun para apuntarlo. Reciba V. Sa. eſta prueba de mi agradecimiento, nacida de la complacencia, que tengo de emplearme en la educacion de una Juventud tan florida, como la*

que se ve, que por todas partes brilla en esta Capital, y Principado.

De este Colegio, y Barcelona 13 de Setiembre de 1758.

MUI ILUSTRE SEÑOR.

B. L. M. de V. S.

Su más obsequioso, y atento Servidor

Thomas Cerda de la Comp.ª de JHS.

A LA JUVENTUD ESPAÑOLA.

PAra vosotros, ò Nobles Jovenes, Delicias, y Esperanzas de nuestra Nacion Española se trabaja unicamente esta Obrita, à fin de evitar la molestia de escribir en la Clase, y poder dar con alguna mayor extension estos Tratados, los mas essenciales, por ser los Fundamentos de esta grande Ciencia de las Mathematicas. No he sido en el disponer esta Obra del parecer de algunos, que omiten varios puntos en los Elementos, por parecerles sobrado arduos para los Jovenes, que empiezan; porque juzgo, que sería hacer agravio à vuestros talentos, el omitir algunos puntos por dificiles, sí son utiles; ni conoce el fondo de la Nacion Española, quien no lo juzgue. La experiencia me ha enseñado, que son capaces nuestros Jovenes de imponerse en qualquier punto, si se les propone como se debe. Es verdad, que algunas veces la dificultad de escribir en la Clase algunos Tratados hace, que en los Manuscritos se encuentren de suerte, que es impossible el entenderlos; por esso mi principal cuidado, y conato es el imprimir mis Liciones, ya porque habiendo de escribir en la Clase, el tiem-

po mas apreciable à los Diſcipulos, que es el que eſtán con ſus Profeſſores, ſe pierde caſi todo en un trabajo material, ſiempre inutil, y tal vez pernicioſo; ya tambien porque la penuria del tiempo obliga à omitir muchas coſas baſtante neceſſarias, otras darlas tan ſuperficialmente, que no merecen nombre de Elementos; en fin por impreſſo, ſin tanta moleſtia, ſe puede dar quatro veces mas, y mejor de lo que ſe da por eſcrito; porque es cierto, que aun los mas cuidadoſos Profeſſores de las quatro partes del tiempo, que eſtán con ſus Diſcipulos, emplean las tres en eſcribir, y la otra en practicar, ò explicar: luego ſupueſtos ya impreſſos los Tratados, eſto que ſe empleaba en dictar, ſe emplea en explicacion, y hará en eſte caſo en un año ſolo un Maeſtro tanto, como en quatro eſcribiendo. Añadeſe, que muchos Señoritos, que ſi ſe han de ſujetar à eſcribir, como Niños, no emprenderán el arduo eſtudio de las Mathematicas, atrahidos de la oportunidad de tenerlo impreſſo, guſtarán de imponerſe en algunos puntos, que hacen gran parte de la buena educacion, que debe tener un Caballero de prendas, quedandoſe tal vez de otra ſuerte diamante bruto, aquel que por ſus brillos podria ſer el luſtre de toda una Nacion. Para lograr pues en alguna manera tanta utilidad, mi fin es dar impreſſos los Tratados.

Pero como no me puedo prometer de mi mismo ni la fortuna de que agraden al Publico mis Escritos, ni de costear todo lo necessario para semejantes Impressiones, adelanto esta Obrita para sondar el gusto de nuestra Nacion Española. Si acertára à tener la dicha de ser en esto de alguna utilidad à mi Patria, concluido el segundo Tomo de las Equaciones, el mas essencial de la Algebra, que actualmente se está imprimiendo, comenzará la Impression de los otros tres, que tengo ya dispuestos para ello; es à saber, la *Geometría*, y *Trigonometría*, la *Aplicacion de la Algebra à Geometría*, y *Curvas*, el *Methodo Directo*, è *Inverso de las Fluxîones*, que otros llaman *Calculo Diferencial*, è *Integral*; y allanados estos passos, segun vea la disposicion del Publico, proseguiré en las otras partes superiores, assegurando, que procuraré en los Elementos de cada Ramo de las Mathematicas, el poner los puntos segun el estado, en que actualmente se encuentran estas Ciencias en Inglaterra, y Francia, dos Naciones sin duda las mas adelantadas en esta materia, entresacando de sus Libros lo mas selecto, para poderlo ofrecer por obsequio à nuestra España, à cuyo lustre debe contribuir qualquier fino Español por la parte, que à él le pertenece. Y assi tomad, ò Nobles Jovenes, este mi deseo de serviros; suplicando

INDICE
DE LOS CAPITULOS, Y ARTICULOS contenidos en este primer Tomo.

PROEMIO, Pag. 1
CAP. I. Diferencia entre la Arithmetica, y Algebra, 5
CAP. II. Propriedad, y Valor de los Numeros, 9
CAP. III. De las quatro Reglas Fundamentales de la Arithmetica Comun, 14
ART. I. Sumar Quantidades Enteras, y Mixtas, 15
ART. II. Restar una Quantidad de otra, 19
ART. III. Multiplicar una Quãtidad por otra, 24
ART. IV. Dividir una Quantidad por otra, 30
ART. V. Algunas cosas, que se suelen ofrecer en la practica de la Multiplicacion, y Division, 39
CAP. IV. De las quatro Operaciones Fundamentales de la Algebra, 48
ART. I. Noticias previas para las Operaciones de Algebra, 49
ART. II. Sumar Quantidades Algebraicas, 52
ART. III. Restar Quantidades Algebraicas, 55
ART. IV. Multiplicar una Quãtidad Algebraica por otra, 57
ART. V. Dividir Quantidades Algebraicas, 62
CAP. V. De las Fracciones Comunes, assi Numericas, como Algebraicas, 73
ART. I. Explicase que cosa sea Fraccion, y su Valor, *ibid.*
ART. II. De la Reduccion de las Fracciones à otras Expressiones, 77
ART. III. De las quatro Reglas Arithmeticas por Fracciones Comunes, 82
CAP. VI. De las Fracciones Decimales, 90
ART. I. Explicanse las Fracciones Decimales, y su Formacion, *ibid.*
ART. II. De las quatro Operaciones Arithmeticas por las Fracciones Decimales, 95
CAP. VII. De las Razones, y Proporciones, 106
ART. I. De las Razones, y sus diferentes Especies, *ibid.*
ART. II. De las Proporciones en Comun, 110
ART. III. Theoremas Fundamentales sobre las Proporciones Geometricas, 115
ART. IV. De la Proporcion de los Extremos por la igualdad de las Razones intermedias, 123
ART. V. De las Reglas de Proporcion Arithmetica, 128
ART. VI. De las Reglas de Proporcion Geometrica, 131
CAP. VIII. De la Regla de Tres, 136
Regla de Tres Directa Simple, 137
Regla de Tres Directa Compuesta, 140
Regla de Tres Inversa Simple, 145

INDICE.

Regla de Tres Inversa Compuesta, 146
CAP. IX. De algunas Aplicaciones de la Regla de Tres, 148
Reglas de Interés, 149
Regla de Interés Simple, *ibid.*
Regla de Interés Compuesto, 154
Reglas de Compañia, 156
Regla de Compañia sin Tiempo, 157
Regla de Compañia con Tiempo, 159
Reglas de Falsa Posicion, 162
Regla de Falsa Posicion Simple, *ibid.*
Regla de Falsa Posicion Doble, 164
Reglas de Alligacion, 167
Alligacion Media, *ibid.*
Alligacion Alternada, 170
CAP. X. De la Composicion de Razones, 178
ART. I. Explicase la Composicion de Razones, *ibid.*
ART. II. De las quatro Operaciones Arithmeticas con las Razones, 182
CAP. XI. De las Potencias, ò Elevacion de las Quantidades, 191
ART. I. De las Potencias de Quantidades Simples, *ibid.*
ART. II. De las Potencias de Quantidades Compuestas, 198
CAP. XII. De la Extraccion de Raices de Quantidades Algebraicas, 208
ART. I. De la Extraccion de Raices de Quantidades Algebraicas Simples, *ibid.*
ART. II. De la Extraccion de Raices de Quantidades Algebraicas Compuestas, 215
Regla General para sacar qualquier especie de Raices de Quantidades Algebraicas Compuestas, 217
Aplicacion de la Regla General à la Extraccion de Raices Quadradas, 218
Aplicacion de la Regla General à la Extraccion de Raices Cubicas, 221
CAP. XIII. De la Extraccion de Raices de Quantidades Numericas, 224
ART. I. Regla General para la Extraccion de qualquier genero de Raices de Quantidades Numericas, *ibid.*
ART. II. Aplicacion de la Regla General à la Extraccion de Raices Quadradas, 227
ART. III. Aplicacion de la Regla General à la Extraccion de Raices Cubicas, 231
CAP. XIV. Del Calculo de las Quantidades Radicales, 235
Reduccion de Quantidades Radicales, 238
Las Operaciones Arithmeticas con las Quantidades Radicales, 242
CAP. XV. De la Progresion Arithmetica, 245
CAP. XVI. De la Progresion Geometrica, 251
CAP. XVII. De la Proporcion, y Progresion Harmonica, 258
CAP. XVIII. De los Logarithmos en Comun, 263

CAP. XIX. Syſtema de los Logarithmos de Briggs, 273
ART. I. Propriedades generales de eſtos Logarithmos, *ibid.*
ART. II. De algunas coſas, que ſe ofrecen en la practica de los Logarithmos de Briggs, 280
ART. III. De la Arithmetica Logarithmica, 288
Arithmetica Logarithmica de los Enteros, 289
Arithmetica Logarithmica de las Fracciones Comunes, y Decimales, 294
CAP. XX. De los Logarithmos Hyperbolicos, 296
Su Formacion, *ibid.*
Practica de los Logarithmos Hyperbolicos, 303
Tabla de los Logarithmos Hyperbolicos, 308

ELEMENTOS GENERALES
DE ARITHMETICA,
Y
DE ALGEBRA.

PROEMIO.

LA *Mathematica* en comun es una Ciencia, que trata de la *Magnitud*, y *Extenſion*. Por nombre de *Magnitud* ſe entiende todo aquello, que es capaz de aumento, y diminucion, eſto es, que añadiendoſele algo de la miſma eſpecie, ſe aumenta, y quitandoſele algo, ſe diſminuye. Aſſi una linea, un cuerpo, un eſpacio, un movimiento, una fuerza es magnitud.

Toda Magnitud ſe puede comparar con otra de la miſma eſpecie, eſto es, linea con linea, cuerpo con cuerpo, eſpacio con eſpacio; y por conſiguiente le es igual, mayor, ò menor, y ſolo por eſte cotejo con otra, como medida, podemos llegar à co-

nocer ſu *quantidad*, ò *quan grande ſea*. Aſſi para conſiderar el eſpacio de tiempo, que llamamos *hora*, lo cotejamos con otro eſpacio de tiempo mas breve, que llamamos *minuto*; y ſegun el eſpacio de tiempo dado contiene mas, ò menos minutos, decimos, que es *mayor*, ò *menor*. Si la quantidad, ò magnitud, que medimos, es preciſamente igual à la que tomamos por medida, ſe llama *Unidad*, ò *uno*: ſi la contiene dos, ò mas veces, ſe llama *Numero*, como *dos*, *tres*, &c. Pero ſi la quantidad, que cotejamos, es menor que ſu medida, entonces dividimos la medida en partes iguales, y conſideramos quantas de eſtas partes contiene, y eſto es lo que llamamos *Numero Quebrado*, ò *Fraccion*.

Las quantidades en la Mathematica ſe exprimen por ciertos châractéres, lineas, ò figuras. Pero como en eſtas quantidades ſe puede conſiderar, *quantas* ſean, ò ſu *numero*, y *quan grandes* ſean, de ahí nace la diviſion de la Mathematica en dos partes, que ſon *Arithmetica*, ò *Calculo*, y *Geometría*. La Arithmetica da reglas para encontrar, y combinar ſu *numero*; y la Geometría ſu *magnitud*, y *extenſion*; y de eſtas dos partes, aplicadas à diferentes materias, reſultan los otros Tratados, como *Mechânica*, *Optica*, *Aſtronomía*, *Nautica*, &c.

La

La Mathematica procede por *Definiciones*, esto es, explicaciones claras, y limpias del sugeto, de que se trata, ò termino, de que se sirve: por *Postulados*, ò *Hypotheses*, que son la suposicion de una cosa possible: por *Axîomas*, que son verdades patentes, de que nadie puede dudar. De ahí passa à las *Proposiciones*. De estas hai de dos suertes, unas que llaman *Theoremas*, que son proposiciones, que exponen las propriedades, y perfecciones de una cosa, otras que llaman *Problemas*, que muestran como se ha de hacer la cosa, y reducen à la practica la Theorica ya demonstrada.

Estas Proposiciones las prueba la Mathematica por *Demonstracion*, que es decir *prueba evidente*, que claramente se deduce immediatamente de los Axîomas, ò de otras Proposiciones ya demonstradas. Se sirve la Mathematica de *Lemmas*, que son unas proposiciones adelantadas, que allanan el passo para otra Proposicion, que es la principal, que se intenta demonstrar: usa de *Corollarios*, que son consequencias, que nacen de la Proposicion demonstrada: remata finalmente con *Escolios*, que ilustran lo ya demonstrado, ò resumen quanto se ha dicho.

Los principales Axîomas, de que se sirve la Mathematica para sacar de ahí sus demonstraciones son los siguientes.

AXIOMAS.

1º. *El todo es mayor, que ninguna de ſus partes.*

2º. *El todo es igual à todas ſus partes juntas, por conſiguiente todas las partes juntas de un todo ſon iguales al todo.*

3º. *Si à quantidades iguales ſe añaden partes iguales, los todos que reſultan ſon iguales.*

4º. *Si à quantidades iguales ſe añaden partes desiguales entre sí, los todos que reſulten ſon entre sí desiguales.*

5º. *Si de quantidades iguales ſe quitan partes iguales, las que quedan ſon entre sí iguales.*

6º. *Si de quantidades iguales ſe quitan partes desiguales, las que quedan ſon deſiguales.*

7º. *Las quantidades ſon iguales entre sí, ſi ſon entrambas iguales à una otra quantidad.*

8º. *Los duplos, los triplos de quantidades iguales ſon tambien entre sí iguales; por conſiguiente las mitades, los tercios, y quartas partes, &c. de quantidades iguales ſon tambien entre sí iguales.*

Sobre eſtos principios en sí tan evidentes eſtá fundada la grande Facultad, y Ciencia de las Mathematicas.

CAPI-

CAPITULO PRIMERO.

De la Diferencia entre la Arithmetica, y Algebra.

1 LA *Arithmetica es una Ciencia, que trata de los Numeros*, esto es, da Reglas para inferir unas quantidades de otras. Y como todo lo que se suele buscar en los Numeros, ò quantidades, se reduce à ver, dos, ò muchas quantidades juntas *quanto hacen?* quitada una quantidad de otra, *que quantidad es la que queda?* una quantidad muchas veces tomada *à quanto sube?* una quantidad dividida entre muchos, *quanto le corresponde à cada uno?* Por esso todas sus Reglas se reducen à quatro, que son *Sumar*, *Restar*, *Multiplicar*, y *Partir*.

2 Pero para tratar la Arithmetica de essos Numeros, ò quantidades, es menester, que tenga algunas *expressiones*, ò *señales*, que los expriman; y para esto tiene dos especies de expressiones, las unas *determinadas*, esto es, que expriman un numero determinado, otras indeterminadas, y *universales*, que son indiferentes para significar qualquier numero, y quantidad, y con las quales hace sus operacio-

raciones *univerſales*, eſto es, verdaderas en qualquier numero, y quantidad particular, que ſe las quiera hacer ſignificar. De las primeras tiene unicamente diez, que ſon los que comunmente llamamos *Numeros* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y con ellos, y con ſu diferente diſpoſicion ſe puede ſignificar, y exprimir qualquier numero finito poſſible: las ſegundas ſon comunmente las letras del Alphabeto Latino, ò Griego, y tal vez tambien del Hebreo.

3 Y en efecto, que yo exprima el *numero de tres* con eſta expreſſion 3, ò con eſta otra *a*, una vez que convengamos, que eſta expreſſion *a* en eſtas circunſtancias quiere decir *tres*, lo miſmo es. La parte de la Arithmetica, que ſe ſirve para ſus operaciones de las expreſſiones determinadas 0, 1, 2, &c. ſe llama ſimplemente *Arithmetica*, y ſus expreſſiones, de que ſe ſirve, *Numeros*, ò *Châractéres Arithmeticos*. La parte que ſe ſirve de las expreſſiones univerſales, è indeterminadas *a*, *b*, *c*, *&c.* ſe llama *Algebra*, ò *Arithmetica Univerſal*, pero entrambas ſe fundan en unos miſmos principios, aunque el modo de obrar es algo diferente el uno del otro; el del Algebra es mas facil, y expedito, porque no eſtá atado à tantas leyes, y circunſtancias, el de la Arithmetica es mas dificil, y penoſo.

No

4 No solo tienen la Arithmetica, y Algebra expressiones para significar las quantidades, sino tambien que de acuerdo universal de todos los Mathematicos para lograr la brevedad, tiene otros *signos* para exprimir las operaciones, y la razon, que las quantidades tienen entre sí, los quales señales facilmente se aprenden por el uso; los mas frequentes son

$=$, $>$, $<$, $+$, $-$, $\times$, $:$, $\surd$, $::$, $\backsim$, ∞, $\div$, $\ddot{\div}$, $\pm$.

Para significar, que una quantidad es igual à otra, usa de esta señal $=$, que quiere decir es *igual*, ò *que es igual*. Assi $a = b$, que quiere decir, que la quantidad expressada por esta letra *a* es igual à la quantidad expressada por *b*, y en general el agregado de todas las quantidades, y terminos, que están en la una parte, es igual al agregado de quantidades, y terminos, que están en la otra. Assi $a + b = c - d$ significa, que la suma de *a*, y de *b* es *igual* à la diferencia de *c* à *d*.

5 Para significar, que una quantidad es mayor, que otra, usa de esta señal $>$, de manera que la quantidad, que está en la parte abierta, es *mayor*, y la que está en la punta, es *menor*. Assi $a > b$ significa, que *a* es mayor que *b*. Esta señal $+$ significa *plus*, ò *mas*, y sirve para denotar, que la quantidad, que le sigue, se ha de tomar, como *junta*, ò *añadida*

dida à las otras, de quienes este signo la separa, ò mas breve significa *la suma* de ellas. Assi 4 + 3 significa 3 *añadido* à 4, esto es 7. Esta otra señal — significa *minus*, ò *menos*, è indica, que la quantidad, que se le sigue, se ha de quitar de las otras, que la acompañan, ò la *diferencia* de entrambas. Por lo tanto *a* — *b*, quiere decir, que de *a* se ha de quitar *b*, por consiguiente significará solo la *diferencia* entre *a*, y *b*. Assi 4 — 3 = 1.

6 Esta señal × significa, que las quantidades entre quienes está, se han de tomar como *multiplicadas entre sí*, esto es, su producto, ò el todo, que resulta de la multiplicacion de entrambas, por lo qual 3 × 7 = 21. Algunas veces en lugar de × se sirven, para indicar la misma multiplicacion, de un puntico entre las dos quantidades (.). Por lo tanto 3 × 7 = 3 . 7; pero este puntico en quantidades numericas está expuesto à que indique *Decimales*, y assi no lo usarémos para semejante multiplicacion. Pero si las quantidades son algebraicas, y simples, esto es, que no consten de muchos terminos separados entre sí por los señales +, —, se suele omitir la señal de multiplicacion, por lo tanto *a* × *b* = *a* . *b* = *ab*.

7 Para indicar la division se escribe una quantidad sobre la otra, separandolas por una linita, poniendo encima *la que se divide*, y baxo

baxo aquella *por quien ſe divide.* Aſſi $\frac{10}{8}$ ſignifica el *Quociente*, que reſulta de la diviſion de 10 por 8, $\frac{a}{b}$ el Quociente, que reſulta partiendo *a* por *b*. Otros ponen las dos quantidades ſeguidas, primero la que ſe divide, y deſpues aquella por la qual ſe divide, ſeparandolas entrambas por dos punticos, por lo tanto $\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3$. Para ſignificar, que una quantidad *ſe aſſemeja* à la otra, uſan de una *S* à la larga entre las dos, aſſi $a \backsim b$. Finalmente para ſignificar una quantidad *infinita*, uſan de eſta ſeñal ∞.

CAPITULO II.

Propriedades, y Valor de los Numeros.

8 POR nombre de *Numeros* entendemos aquí la unidad 1, el complexo de muchas unidades, como 2, 3, 4, &c. ò alguna parte de la unidad, como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, &c. A la unidad, ò al complexo de muchas unidades, llamamos *Enteros*, ò un *Todo*, à las partes de la unidad llamamos *Quebrado*, ò *Fraccion*. De ahí viene la 1ª. diviſion de los Numeros en *Enteros*, y *Quebrados*. Pero lo que es un *entero* reſpecto de una denominacion,

cion, es *quebrado* respecto de otra. Assi un *pie* es un entero respecto de pie, pero un quebrado, ò $\frac{1}{3}$ respecto de *vara*. Pero si el numero consta de entero, y quebrado, como $5\frac{1}{2}$, se llama *Mixto* de entrambos.

9 La 2a. division de los *Numeros* es en *Par*, è *Impar*. Numero par es el que exâctamente, y sin resta se puede dividir por 2, como 4, 6, &c. Numero impar es el que difiere de una unidad del numero par, como 1, 3, 5, &c. Un numero, ò quantidad se dice, que *mide* al otro, ò que es su *medida*, quando se contiene exâctamente en él una, ò muchas veces sin resta, ò lo que es lo mismo, quando dividido el otro por este, el quociente es un numero entero. Assi 2 mide à 6, porque 2 se contiene exâctamente en 6 *tres* veces, pero no es medida de 7. El numero, que assi contiene al otro *muchas veces* se llama su *Multiplo*, ò *Multiplice*, y el numero assi contenido en el otro muchas veces es su parte *aliquota*, ò su *submultiplo*.

10 Quando dos, ò mas Numeros se pueden medir por una misma medida, se llaman *Commensurables entre sí*, y el numero, que los mide se llama su *Comun medida*. Assi 6, y 9 son entre sí commensurables, porque à entrambos los mide 3. Pero como muchos numeros, à mas de tener una comun medida, pueden tambien tener otra, el *numero mayor*, que

que los mide à entrambos, es su ***mayor comun medida***. Assi 12, y 8 tienen por comunes medidas à 2, y 4, pero 4 es su mayor comun medida. Todo numero entero es commensurable con la unidad, porque esta, una vez tomada, se mide à sí, y tomada muchas veces mide al otro. Si dos numeros, como 5, y 7 no tienen otra comun medida, que la unidad, se llaman *primeros entre sí*; pero si à mas de la unidad, tienen tambien otra comun medida, son *entre sí compuestos*.

11 Por lo tanto Numero *primero en sí* es el que no tiene otra medida, que la unidad, como 5, 7, 11, &c. Numero *compuesto en sí* es el que à mas de tener por medida la unidad, le mide tambien otro numero, como 6, que tiene por medida à mas de la unidad, tambien à 2, 3. Numero *Racional* es aquel, cuya razon con la unidad se puede exprimir con *finito* numero de cifras, ò châractéres. Y assi es numero racional todo numero entero, quebrado, ò mixto, que se pueda *exâctamente* exprimir con determinado, è finito numero de cifras; porque él mismo exprime su razon con la unidad. Al contrario numero *Irracional* es aquel, cuya razon con la unidad no se puede assi *exâctamente* exprimir. Estos numeros Irracionales se llaman tambien *Surdos*. Que cosa sea *Razon*, lo explicarémos despues.

En

12 En orden al *valor*, y *ſignificacion* de los Numeros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, tomados ſeparadamente todo el Mundo los ſabe, 1 ſignifica *uno*, 2 *dos*, &c. Solo el 0 ſeparadamente, y por sí no tiene ſignificacion alguna, mas junto con otro numero, aunque en sí tampoco entonces ſignifique, ni tenga valor, *aumenta de diez el valor del numero, que le precede*, menos en las Fracciones Decimales, que lo *diſminuye*, como verémos. Aſſi 2 ſolo, ſignifica dos *unidades*, pero ſi le ſigue 0, como 20, ſignificará *dos*, pero eſtos ſerán *decenas* de unidades, ſi ſe le ſiguen dos ceros, ſignificará *centenas*, *&c.* Los demás numeros tomados muchos juntos entre sí, y formando una miſma quantidad, à mas del valor determinado, que tienen por sí, *realzarán eſte por el pueſto, y orden en que eſtán, creciendo ſiempre en la proporcion decupla*, comenzando deſde la cifra de las unidades ácia la izquierda.

13 Por lo tanto en eſta partida 368, el 8 por ſer el *primero* ſignifica ſolo ocho *unidades*, el 6 como es el *ſegundo*, ſignificará tambien *ſeis*, pero eſtos ſerán *decenas* de unidades, el 3 ſignifica *tres*, pero ſon *centenas*, ò tres cientos; con que juntos ſignificarán treſcientos ſeſenta y ocho. Si antes del 3 hubieſſe otro, ſignificaria ya eſte otro *miles*, ſi otro, *decenas* de miles, &c. como ſe ve en eſta

eſta Tabla, en la qual ſe exprime el valor, que toman los numeros por el *pueſto*, *orden*, *y diſtancia*, que tienen de la cifra de las unidades ácia la izquierda.

&c.	*Billones.*	*Cent. de Mill. de Millones.*	*Dec. de Mill. de Millones.*	*Millares de Millones.*	*Centenas de Millones.*	*Decenas de Millones.*	*Millones, ò Cuentos.*	*Centenas de Millares.*	*Decenas de Millares.*	*Millares.*	*Centenas.*	*Decenas.*	*Unidades.*
	5,	7	8	4,	6	3	2,	5	1	9,	6	5	3
	Periodo de Billones.	*P. de Mill. de Millon.*			*Periodo de Millones.*			*Periodo de Millares.*			*Periodo de Unidades.*		

14 Aſſi para leer qualquiera quantidad, como la precedente, ſeparo los numeros en periodos de tres en tres, comenzando deſde la derecha ácia la izquierda, el primer periodo ſerá el de las *unidades*, que es decir, que la primera cifra deſde la derecha (3) ſignificará tres *unidades*, la ſegunda (5) cinco decenas de *unidades*, y la tercera (6) ſeis centenas de *unidades*. El ſegundo periodo 519 ſerá de los *millares*, el 9 ſignificará nueve *mil*, el 1 una decena de *Millares*, y la tercera 5 cinco centenas de *Millares*, y las tres juntas *quinientos y diez y nueve mil*. El tercer periodo 632 ſerá el de los *Millones*, ò Cuentos,

tos, y serán *seiscientos treinta y dos Millones.* El quarto periodo 784 será el de los *Millares de Millones*, que serán *setecientos ochenta y quatro Millares de Millones.* El quinto periodo 5 será de los *Billones*, y como no hai sino un numero significará solo *unidades* de Billones. Comenzando pues à leer desde la izquierda, como se acostumbra, toda la partida se reducirá à 5 Billones, 784 Millares de Millones, 632 Millones, 519 mil, 653 unidades.

CAPITULO III.

De las quatro Reglas fundamentales de la Arithmetica.

15 COmo el fin principal de la Arithmetica es, de unas quantidades dadas, y conocidas encontrar otras, que se buscan, como su *Suma*, su *Diferencia*, su *Producto*, su *Quociente*, y entre estas quantidades dadas hai unas *simples*, y de una sola especie entre sí, que llamamos *Simples*, ò *Enteros*, y otras *Mixtas*, y de diferentes especies, que se componen de varias suertes de cosas, pero que las unas se contienen en las otras,

otras, y ſon ſus partes, ò ſus quebrados, como *libras*, *ſueldos*, y *dineros*, *varas*, *pies*, y *pulgadas*, &c. Por eſſo enſeñarémos eſtas Reglas, ya para el caſo, en que las quantidades dadas ſean todas de una miſma eſpecie, ò ſolos enteros, ya tambien para el caſo, en que todas, ò à lo menos algunas ſean mixtas.

ARTICULO PRIMERO.

Sumar quantidades Enteras, y Mixtas.

16 SUmar no es otra coſa, que *juntar en una muchas quantidades, ò partidas dadas*; y la que de eſta junta reſulte, ſe llama *Suma*, ò *Total*. Para ſumar muchas partidas *Simples*, ò *Enteros*, tomeſe la Regla ſiguiente.

Regla 1ª. *Eſcribaſe una partida baxo la otra, de manera que las Unidades eſtén directamente baxo las Unidades, las Decenas baxo las Decenas, &c. Tireſe una linea baxo todas las partidas, y comenzando de la derecha ácia la izquierda, tomeſe la ſuma de todas las Unidades, deſpues la de las Decenas, deſpues la de las Centenas, &c. ponganſe eſtas ſumas baxo la linea, y eſta partida ſerá la Suma total.*

EXEM-

EXEMPLOS.

(*A*)	723	(*B*)	1563
	245		841
	1		3456
Suma	969	*Suma*	5860
	3680		5060
	465		56
	327		4380
Suma	4472	*Suma*	9496

17 Assi en la primera columna de (*A*) digo 3, y 5 son 8, y 1 son 9, lo que escribo baxo la columna de las Unidades, porque la tal columna es de Unidades. Passo à la segunda 2, y 4 son 6, que pongo baxo la columna de Decenas. Passo à la tercera 7, y 2 son 9, que son Centenas, pues la *Suma total* es 969. La razon de esta operacion es, porque el todo, ò suma total no es otra cosa, que todas las partes juntas, y assi el total no será otra cosa, que la suma de todas las Unidades, la suma de todas las Decenas, de todas las Centenas, &c. las quales he juntado en la linea inferior.

18 Regla 2ª. *Si la Suma de una columna passa de 9, esto es, contiene Decenas, y Unidades, ò à lo menos Decenas, ponganse unicamente*

camente las Unidades, si las hai, baxo esta columna, y sino las hai, pongase 0, y guardense las Decenas, que juntarémos con la columna siguiente.

Hayanse de sumar estas partidas 1563, 841, 3456, las que escribo como en el Exemplo, y digo 3, y 1 son 4, y 6 son 10: como en 10 hai una Decena, y ninguna Unidad mas, pongo 0 baxo la columna, que sumo, y la 1 *decena* la junto à la columna siguiente, diciendo 1, (que llevo) y 6 son 7, y 4 son 11, y 5 son 16: como en 16 hai una Decena, y seis Unidades, pongo estas unidades (6), guardando siempre las decenas para la columna siguiente, y prosigo de esta misma suerte, quantas quiera columnas formen las partidas.

19 Para sumar quantidades *Mixtas*, ò que consten de diferentes especies, tomese la Regla siguiente.

Regla. *Escribanse las quantidades, una debaxo la otra, de manera que las de una misma especie formen todas una misma columna. Tirese baxo una linea. Comiencese desde la derecha, y sumese esta especie. Si esta suma hiciesse una, ò muchas unidades de la especie, que hai en la columna siguiente ácia la izquierda, juntense estas unidades con las de la columna siguiente, y si no, pongase la misma suma baxo la columna, en quien se obra. Ha-*

gase lo mismo en las otras columnas, que se siguen, y la partida, que resulte, será la Suma total.

EXEMPLO.

En libras, sueldos, y dineros.

(*A*)	56$^{l.}$	18$^{s.}$	10$^{d.}$
	43	15	4
	3	0	8
Suma	103	14	10

EXEMPLO.

En varas, pies, y pulgadas.

	38$^{v.}$	2$^{p.}$	11$^{pulg.}$
	56	1	10
	4	2	5
Suma	100	1	2

20 Como en una libra hai 20 *sueldos*, en el sueldo 12 *dineros*, *comienzo siempre por la columna de especies inferiores*, en (*A*) 10, y 4 son 14, y 8 son 22, que son *dineros*: como en 22 dineros hai 1 *sueldo*, y 10 *dineros*, pongo baxo la columna de *dineros* los 10, y el 1 *sueldo*, que es una unidad de las especies de la columna siguiente, lo junto con la columna, que se sigue, y digo 1, y 8 son 9, y 5 son

ſon 14, pongo el 4, y llevo 1, y 1, y 1 ſon 3, que junto al 4 harian 34 ſueldos, pero como eſta quantidad es una libra, y 14 ſueldos, pongo ſolo los 14 *ſueldos*, y guardo la 1 *libra* para la *columna* de libras, que ſumandolas ſon 103. Lo miſmo ſe hace en qualeſquiera peſos, monedas, medidás, &c. teniendo preſente, que de las eſpecies inferiores, como partes, ſe forman las ſuperiores.

Si ſe hubieſſe de juntar una quantidad muchas veces à sí miſma, mas brevemente ſe hace por la *Multiplicacion*, como verémos.

ARTICULO II.

Reſtar una quantidad de otra.

21 R*Eſtar es quitar una quantidad menor de otra mayor, para encontrar el exceſſo de la mayor ſobre la menor, ò la diferencia de entrambas.* La quantidad, que queda, ſacada la menor de la mayor, es, y ſe llama *Reſta*, *Diferencia*, ò *Reſiduo*. Para quitar una quantidad de otra, tomeſe la Regla ſiguiente.

Regla. *Eſcribaſe la menor baxo la mayor, de manera que correſpondan Unidades con Unidades, Decenas con Decenas, &c. Tireſe deſ-*

despues una linea: saquense las unidades de la quantidad de abaxo de las unidades de la quantidad de arriba, y pongáse su diferencia baxo la columna de las unidades. Passese despues à la columna de Decenas, hagase lo mismo, y lo mismo en las columnas siguientes. Y la suma de unidades, decenas, &c. que quedan, es la Diferencia de una quantidad à la otra. Porque quitando de una suma (qual es la quantidad mayor) una de sus partes (qual es la quantidad menor), la que queda, será la otra parte, que es la Diferencia, ò excesso, con que la mayor excede la menor, ò el todo à la parte.

EXEMPLOS.

(*A*)	4683	(*B*)	7046
	3450		2879
Resta	1233	*Resta*	4167

22 Hayase de quitar 3450 de 4683, las pongo como en el Exemplo (*A*), y comenzando desde las unidades, digo de 3 quien quita 0, quedan 3, que pongo abaxo, prosigo, de 8 quito 5, quedan 3, que pongo tambien directamente baxo la columna, que resto, de 6 quito 4, quedan 2, finalmente de 4 quito 3, queda 1, pues la *Diferencia* de entrambas quantidades dadas es 1233.

23 *Si las unidades* (lo mismo digo de las

las *decenas, &c.) del numero de abaxo fuessen mas, que las del numero de arriba, tomo una decena del numero antecedente de arriba, y esta decena la junto con las unidades del numero de arriba, y de la suma quito las unidades del numero de abaxo.* Si la immediata antecedente fuesse o, quitola de la otra, que se sigue despues, y este o, y quantos ceros se le siguiessen immediatamente, valdrán cada uno 9; pero quando llegue à la cifra, de quien he quitado 1 *decena*, tengo de tener presente, que falta 1, que ya he quitado, y assi la tal cifra supone por uno menos.

24 Hayanse de quitar 2879 de 7046. (*B*) Digo pues, como en 6 no hai bastantes unidades, para quitar de ellas 9, tomo una decena de la columna antecedente, que junta al 6 hacen 16, de quien quitando 9 quedan 7. Passo à la segunda columna, en donde advierto, que del 4 ya he quitado 1, por consiguiente ya no quedan mas que 3, que no son bastantes para que de ellos se quiten 7, pues tomo una decena de la columna, que se sigue; pero reparo, que la cifra siguiente es o, pues la considero como tomada de la columna siguiente, es à saber del 7, pues de 13 quito 7 quedan 6. Passo à la otra, en que encuentro el o, que junto con el 1, que habia quitado del 7 hacia 10, pero de este 10 ya habia quitado 1, y assi no quedan sino 9, de

quien

quien quitando 8, queda 1. Passo al 7, de quien por haber sacado 1, quedan 6, del qual quitando 2, quedan 4. Pues la Resta es 4167.

25 Si las quantidades, que se han de restar, fuessen mixtas de diferentes generos, como de *libras*, *sueldos*, y *dineros*, la operacion se hace de la misma suerte, y se ponen las partidas como en el sumar dichas quantidades, poniendo baxo aquella, en que la *especie superior* es menor, correspondiendo libras à libras, sueldos à sueldos, &c. Y si en la partida superior no hubiesse bastante para quitar de ella la inferior, se toma una unidad de la especie immediata siguiente, que reducida à la misma especie inferior, y junta con las de la tal especie, darán una suma, de quien se podrá saçar la partida inferior. Assi:

EXEMPLOS.

	35 l.	16 s.	3 d.		35 v.	1 p.	8 pulg.
	4	17	8		24	2	2
Resta	30	18	7	*Resta*	10	2	6

Comenzando por la especie inferior: en 3 no hai bastante, para que de ello se quite 8, pues tomo 1 *sueldo* de la columna siguiente, y considerando, que 1 sueldo es 12 dineros, los junto con los 3, y tengo 15 dineros, de quien sacando 8, quedan 7. Passo à la columna

na de los *sueldos*, en la qual por haber quitado 1, no quedan sino 15, que no son bastantes, para que de ellos se quiten 17, pues tomo 1 *libra* de la columna siguiente, que es 20 sueldos, los quales juntos à los 15 son 35, de quien quitando 17, quedan 18, y assi de los demás. Del mismo modo nos hemos de valer en el *Restar* qualesquiera quantidades mixtas.

26 Las Reglas de *Sumar*, y *Restar* tienen tanta correlacion entre sí, que la una prueba la otra, pues la una *junta*, lo que la otra *separa*. Para probar si la *Suma* está bien hecha, quitese del total una de las partidas sumadas, y la diferencia debe ser la otra, ò la suma de las demás, si hai mas de dos. Si no sale assi, la operacion está mal hecha. Assimismo para probar si la *Resta* está bien hecha, sumense la partida *menor*, y la *diferencia*, la suma de entrambas debe ser la partida mayor, para ir bien, y esta es la prueba mas natural, y lisa.

ARTI-

ARTICULO III.

Multiplicar una quantidad por otra.

27 MUltiplicar una quantidad por otra no es otra cosa, que *tomar dicha quantidad tantas veces, quantas unidades hai en la otra.* Assi multiplicar 3 por 2 no es otra cosa, que tomar 3 *dos* veces. La quantidad, que se debe multiplicar se llama el *Multiplicando*, aquella por la qual se debe multiplicar, se llama el *Multiplicador*, y la quantidad, que resulta de tomar el Multiplicando tantas veces, quantas unidades contiene el Multiplicador, se llama el *Producto*. El Multiplicando, y el Multiplicador son *Factores*, y *Raices* del Producto.

28 Como el *Producto* es el *Multiplicando tantas veces tomado, quantas unidades contiene el Multiplicador*, se sigue 1º. Que el Producto contiene tantas veces al Multiplicando, quantas el Multiplicador contiene la unidad, ò en otros terminos, la unidad es la misma parte del Multiplicador, que el Multiplicando del Producto, que explican los Mathematicos diciendo, *la misma razon, que tiene la unidad al Multiplicador,*

cador, tiene el Multiplicando al Producto: 2°. Que si se escribiesse el Multiplicando tantas veces, como unidades contiene el Multiplicador, y se sumassen essas partidas, la *suma* de todas sería igual al *Producto* del Multiplicando por el Multiplicador: de donde el *Multiplicar es un modo abreviado de sumar*.

29 Si vuelvo las veces, y lo que es Multiplicando lo hago Multiplicador, y al Multiplicador lo hago Multiplicando, esto es, en vez de multiplicar 3 por 2, multiplico 2 por 3, el Producto 6 me será el mismo. De donde *si tengo dos partidas qualesquiera para multiplicar entre sí, puedo indiferentemente tomar qualquiera de ellas por Multiplicando, con tal que tome la otra por Multiplicador, y el Producto será el mismo*.

30 Quando ni el Multiplicando, ni el Multiplicador llegan à 10, esto es, se exprimen por una sola cifra, como 2, 3, &c. no hai regla particular para multiplicarlos entre sí; basta saber de memoria esta Tabla, que es tambien del todo necessaria para hacer qualquiera multiplicacion de qualquiera quantidad numerica, y podrá servir para la division; pues, como verémos, el Producto dividido por un factor da por Quociente el otro.

TABLA

TABLA DE MULTIPLICACION, Y DIVISION.

Factores.	Producto.	Factores.	Producto.	Factores.	Producto.
2 × 2 =	4	5 × 2 =	10	8 × 2 =	16
2 × 3 =	6	5 × 3 =	15	8 × 3 =	24
2 × 4 =	8	5 × 4 =	20	8 × 4 =	32
2 × 5 =	10	5 × 5 =	25	8 × 5 =	40
2 × 6 =	12	5 × 6 =	30	8 × 6 =	48
2 × 7 =	14	5 × 7 =	35	8 × 7 =	56
2 × 8 =	16	5 × 8 =	40	8 × 8 =	64
2 × 9 =	18	5 × 9 =	45	8 × 9 =	72
2 × 10 =	20	5 × 10 =	50	8 × 10 =	80
3 × 2 =	6	6 × 2 =	12	9 × 2 =	18
3 × 3 =	9	6 × 3 =	18	9 × 3 =	27
3 × 4 =	12	6 × 4 =	24	9 × 4 =	36
3 × 5 =	15	6 × 5 =	30	9 × 5 =	45
3 × 6 =	18	6 × 6 =	36	9 × 6 =	54
3 × 7 =	21	6 × 7 =	42	9 × 7 =	63
3 × 8 =	24	6 × 8 =	48	9 × 8 =	72
3 × 9 =	27	6 × 9 =	54	9 × 9 =	81
3 × 10 =	30	6 × 10 =	60	9 × 10 =	90
4 × 2 =	8	7 × 2 =	14	10 × 2 =	20
4 × 3 =	12	7 × 3 =	21	10 × 3 =	30
4 × 4 =	16	7 × 4 =	28	10 × 4 =	40
4 × 5 =	20	7 × 5 =	35	10 × 5 =	50
4 × 6 =	24	7 × 6 =	42	10 × 6 =	60
4 × 7 =	28	7 × 7 =	49	10 × 7 =	70
4 × 8 =	32	7 × 8 =	56	10 × 8 =	80
4 × 9 =	36	7 × 9 =	63	10 × 9 =	90
4 × 10 =	40	7 × 10 =	70	10 × 10 =	100
Factores.	Dividendo.	Factores.	Dividendo.	Factores.	Dividendo.

31 Para *multiplicar quantidades enteras por enteros* tomese la Regla siguiente: *Pongase el Multiplicador baxo el Multiplicando, de manera que correspondan unidades à unidades, decenas à decenas, &c. Tirese una linea. Multipliquese cada cifra del Multiplicando comenzando por la ultima, por la cifra de unidades del Multiplicador, y su Producto, sino llega à diez, pongase directamente baxo la columna de la cifra, que se multiplica, y si llega à diez, ponganse solamente allí las unidades, si las hai, y si no o, y guardense las decenas para juntarlas al siguiente Producto.*

32 Hecha la primera parte de la multiplicacion, que es multiplicar todo el Multiplicando por la *cifra de unidades* del Multiplicador, passese despues à la segunda parte, que es multiplicar todo el Multiplicando por la *cifra de decenas* del Multiplicador, la qual multiplicacion se hace de la misma suerte, que en la primera parte, solo que el Producto se comienza à poner baxo la columna de la cifra de *decenas* del Multiplicador, y se prosigue poniendo ácia la izquierda. De la misma suerte si hai mas cifras en el Multiplicador, comenzando siempre à poner el Producto baxo la columna en que está la cifra del Multiplicador, que actualmente multiplica. *Sumense despues las sumas de los particulares Productos, como están puestos, y la suma será el Producto total.* EXEM-

EXEMPLOS.

(*A*)	64	(*B*)	306
	× 3		× 24
Producto	192		1224
			612
		Producto total	7344

33 Hayanſe pues de multiplicar 64 por 3. Pueſtas las partidas como en el Exemplo, (*A*) comienzo 3×4 es 12, que es 1 *decena*, y 2 *unidades*, pongo pues baxo la columna del Multiplicador las 2 unidades, y guardo 1 decena para juntarla al ſegundo Producto; proſigo 3×6 es 18, y 1 del primer Producto es 19, como ya no hai mas cifras en el Multiplicando, pongo el 19, y tengo por Producto 192=64×3.

34 Hayanſe de Multiplicar 306 por 24. (*B*) Multiplicando todo el Multiplicando por la *cifra de unidades*, comienzo 4×6 ſon 24, que ſon 2 decenas, y 4 unidades, pongo pues baxo la columna de la cifra, por quien multiplico, las 4 unidades; proſigo 4×0 es 0, y 2 que me quedan del primer Producto, es 2, que los pongo; 4×3 ſon 12, como ya no hai mas que multiplicar en el Multiplicando, pongo los 12, y tengo hecha la primera parte de la multiplicacion.

Paſſo

Passo à la segunda parte tomando por Multiplicador la *cifra de decenas del Multiplicador* : Comienzo 2x6 son 12, pongo pues las 2 unidades baxo la columna de la cifra, por quien multiplico: 2x0 es 0, y 1 que me quedaba del primer Producto, es 1, lo pongo, y prosigo 2x3 es 6, lo pongo. Tengo pues hechas las dos partes de la multiplicacion, que es toda la multiplicacion, por no haber sino dos cifras en el Multiplicador. Sumo pues ahora los Productos parciales *como están*, y tengo la suma 7344 por Producto totál, pues 306x24=7344.

35 La prueba de esta Regla se toma de la misma naturaleza del *multiplicar*, que es tomar el Multiplicando tantas veces, quantas unidades hai en el Multiplicador. En el primer Exemplo en el Multiplicando hai unidades, y decenas de unidades, y en el Multiplicador, por no haber sino una cifra, no hai sino unidades, tomando las unidades del Multiplicando, y sus decenas de unidades, tantas veces como unidades hai en el Multiplicador, se toma todo el Multiplicando, tantas veces como unidades hai en el Multiplicador. En el segundo Exemplo, en el Multiplicador hai unidades, y decenas de unidades, por la primera parte de la multiplicacion se toma todo el Multiplicando tantas veces, como unidades hai en el Multiplicador,

visor, el Producto será igual al Dividendo, porque esto sería volver à poner por la multiplicacion, lo que por la division se habia sacado. De ahí es, *que el mejor modo para probar, si la division está bien hecha, es multiplicar el Quociente por el Divisor, y cotejar el Producto* (ò si queda algo despues de la division, la *Suma* del Producto, y esta resta) *con el Dividendo.* 4º. Que el Dividendo se puede considerar como un *Producto, cuyos factores son el Divisor, y el Quociente*, y assi dividido por uno, dará por Quociente el otro. Por lo qual una vez que tengamos un factor de una quantidad, dividiendola por él, el Quociente será el otro.

38 Para dividir pues bien Numeros enteros, tomese la Regla siguiente. *Escribase la quantidad, que se haya de dividir, à su lado ácia la izquierda pongase el Divisor, separandolo del Dividendo con una linita, ò parenthesis, y à la derecha tirese otro parenthesis, que lo separe del lugar destinado al Quociente.* Esto supuesto, la division se ha de hacer por partes. *Si el Divisor tiene una sola cifra, comiencese à dividir por ella la primera cifra del Dividendo, si es mayor, ò igual al Divisor; pero si es menor, tomense las dos primeras cifras del Dividendo, y vease quantas veces esta primera parte del Dividendo contiene al Divisor, y escribase este numero de veces en el lugar desti-*

deſtinado al Quociente, que eſta ſerá ſu primera cifra.

39 *Para ver ſi eſta diviſion eſtá bien hecha, multipliqueſe la cifra del Quociente encontrada por el Diviſor, y ſu producto pongaſe immediatamente baxo la parte del Dividendo, que ſe ha dividido, reſteſe eſte producto de la primera parte del Dividendo, y ſi queda algo, baxeſe à ſu lado la cifra, que ſe ſigue del Dividendo, que junta con dicha reſta compondrá un ſegundo miembro de la diviſion, el qual dividido por el Diviſor, como el primero, dará por Quociente la ſegunda cifra, de que conſte el Quociente total; y proſigaſe de la miſma ſuerte, que en el primer caſo, haſta que ſe hayan baxado todas las cifras del Dividendo.*

EXEMPLOS.

3)		4)		6)	
456	152	159	$39\frac{3}{4}$	508	$84\frac{4}{6}$
3		12		48	
15		39		28	
15		36		24	
06		3		4	
6					
0					

40 Hayanſe pues de dividir 456 por 3: lo eſcribo como en el Exemplo primero. Tomo la primera cifra del Dividendo, que es 4,

y miro quantas veces está en él contenido 3? Veo que 1, pues esta es la primera cifra del Quociente, que pongo en su lugar, la multiplico por el Divisor, y su producto 3 lo resto de la cifra 4, que he dividido; à la resta 1 le junto la segunda cifra del Dividendo 5, y tengo por *segundo miembro de la division* 15. Pues busco quantas veces está contenido en él el Divisor; y encuentro que 5 veces, pues el 5 es la segunda cifra del Quociente, que multiplicada por el Divisor me da 15, el qual sacandolo del miembro 15, que he dividido, queda 0. Baxo finalmente para tercer miembro de la division el 6, que dividiendolo por 3, me da en el Quociente 2, que juntandolo al Quociente, me da por Quociente total 152, y como no queda ya cifra alguna para dividir, el Quociente es exacto, y la prueba es, que $152 \times 3 = 456$.

41 Si hecha la division de todas las cifras del Dividendo, me quedasse algo como en los demás Exemplos, el Quociente encontrado no sería del todo *exacto*; pero para que lo sea, tomo esto que queda, como en el segundo Exemplo el 3, lo pongo en el Quociente, poniendole immediatamente baxo el Divisor 4, separandolos entrambos con una linita $\frac{3}{4}$, que es una fraccion, y será el Quociente del todo exacto $39\frac{3}{4}$. Considerando atentamente lo que he hecho en esta operacion,

cion, veo que no hai cosa mas natural que el Dividir, pues primero he repartido por las unidades del Divisor las *centenas*, despues las *decenas*, y despues las *unidades* del Dividendo, y assi todo el Dividendo queda repartido en el Divisor.

EXEMPLO.

```
324)  131485  |405 265/324
      1296
      ----
        1885
        1620
        ----
         265
```

42 Si el Divisor contiene muchas cifras, como si se hubiesse de dividir 131485 por 324. *Considero lo primero en quantas de las primeras cifras del Dividendo se contiene el Divisor?* Y reparo que en las tres primeras 131 no está contenido, porque es menor 131, que 324, pues tomo una cifra mas del Dividendo, y tengo por primer miembro de la division 1314, que las separo con un puntico de las demás, y la primera operacion se reduce à dividir 1314 por 324. Pero como la division no se puede toda hacer à la una, divido las centenas de este miembro por las centenas del Divisor, y digo en 13 quantas veces está 3? y encuentro que 4 veces, pues

 pon-

pongo el 4, que es la primera cifra del Quociente, que multiplicada por todo el Divisor, me da por producto 1296, que lo resto del primer miembro del Dividendo, y à la resta 18 le junto la cifra siguiente del Dividendo (8) para tener un segundo miembro de la division, que es 188.

43 Busco si en este segundo miembro del Dividendo 188 está contenido el Divisor 324, y reparo que ni aún una vez está contenido, pues pongo o en el Quociente, *lo que se hace siempre que el miembro Dividendo no iguala à lo menos al Divisor.* Baxo pues la cifra, que se sigue del Dividendo 5, y tengo por nuevo miembro 1885. Pues hago como en la primera operacion: en 18 quantas veces 3? 6, lo multiplico por el Divisor, y reparo que su producto 1944 es mayor, que el miembro Dividendo, pues es señal, que el Divisor no está contenido 6 veces en él, porque à serlo, 6 x por el Divisor sería menor, ò igual; pues rebaxo el 6 de una unidad, y pongo 5 en el Quociente, que multiplicado por el Divisor, resto su producto 1620 del miembro Dividendo, y me quedan 265.

Pero como no tengo ya en el Dividendo mas cifras que baxar, y en esta resta no está contenido el Divisor, está acabada la division, pero el Quociente 405 no es del *todo exacto*, pues le falta lo que resultaria de la di-

division de la ultima resta, y lo pondré como en los casos antecedentes à forma de fraccion, para tener por Quociente exâcto $405\frac{265}{324}$.

44 De lo dicho hasta aquí advierto, 1°. *Que la Division se hace por partes.* 2°. *Que la Division requiere tres operaciones*: *Dividir* para encontrar un Quociente, *Multiplicar la cifra encontrada por el Divisor*, para ver si esta division está bien hecha, *Sacar este Producto del miembro Dividendo*, para ver si resta algo para juntarlo al miembro siguiente de la Division.

Estas son las Reglas fundamentales de toda la Arithmetica en Numeros enteros, y quanto se diga sobre esto no es mas que aplicacion de dichas Reglas à casos particulares. Es verdad, que hechas familiares, y exercitadas estas Reglas, la misma experiencia, y uso facilita muchos modos de abreviar las operaciones, especialmente en Multiplicacion, y Division, como en los casos siguientes.

45 1°. Para multiplicar una quantidad por 10, no hai sino añadir à dicha quantidad un cero. Assi para multiplicar 12 por 10, añado à 12 un cero, y tendré por Producto 120. La razon de esto es, porque multiplicar una quantidad por 10, es dar à cada cifra del Multiplicando un valor diez

veces

veces mayor del que tenia, esto es, hacer que la cifra, que significaba *unidades*, signifique *decenas*, y la que significaba *decenas*, signifique *centenas*, *&c.* y como la significacion de las cifras, quando están juntas, depende del orden, y de su distancia de la cifra de unidades, que es la *primera* à la derecha, añadiendo un cero, hago que las que eran primeras, sean segundas; las segundas sean terceras, &c. por consiguiente, que las que significaban unidades, signifiquen decenas, &c. Si añadiesse dos ceros, multiplicaria por 100, si tres, por 1000, &c. En general *qualquier cifra, que se añade à una quantidad, da à las que estaban un valor decuplo, ò diez veces mayor, que el que antes tenian*, la qual Regla no se estiende à las *Fracciones Decimales*.

46 2°. Por la misma razon para dividir una quantidad por 10, basta separar la ultima cifra por un puntico, y las otras serán el Quociente. Assi para dividir 120 por 10, quito el cero, y me queda por exâcto Quociente 12. Si la ultima cifra no fuesse cero, el Quociente será las otras cifras + *una fraccion*, que tendrá por Numerador dicha cifra separada, y por Denominador el Divisor, como explicarémos tratando de las *Fracciones Decimales*. Assi para dividir 216 por 10 el Quociente será $21.\frac{6}{10}$, para dividir por

100

100 habia de separar dos, por 1000 tres, &c.

3º. Quando assi en el Dividendo, como en el Divisor hubiera en el fin algunos ceros, como si hubiesse de dividir 34000 por 400, quito iguales ceros de entrambos, y divido lo demás, es à saber, 340 por 4, y el Quociente me será el mismo 85.

ARTICULO V.

De algunas cosas, que se suelen ofrecer en la practica de la Multiplicacion, y Division.

47 QUatro son las cosas, que mas comunmente se suelen ofrecer en la practica. 1º. Encontrar todos los *Divisores*, y *Factores* de una quantidad. 2º. Encontrar el *mayor comun Divisor de dos quantidades*, ò la *mayor comun Medida* de entrambas, 3º. *Reducir unas quantidades à otras*. 4º. *Multiplicar*, y *Dividir quantidades mixtas*, ò que constan de diferentes especies.

48 1º. Como toda quantidad, excepto la unidad, se puede considerar como un *Producto* de algunas otras inferiores, toda quantidad tendrá algunos *Factores*, por cuya multiplicacion se puede formar. Y como todo

todo *Factor* es un *Divisor* exâcto de la tal quantidad, por el qual dividiendola, el Quociente será el otro, ò el Producto de los otros, toda quantidad tendrá *Factores*, y *Divisores*: luego encontrando todos sus Divisores, tendrémos por consiguiente todos sus Factores. Para *encontrar todos los Divisores de una quantidad*, tomese la Regla siguiente.

Regla. *Dividase la quantidad por el Divisor mas pequeño, que exceda la unidad, y dé un Quociente sin resta. Dividase tambien este Quociente encontrado por el menor numero, ò Divisor, que exceda la unidad, y dé un Quociente sin resta, y prosigase assi successivamente dividiendo los Quocientes, hasta encontrar uno, que ya no sea divisible exâctamente sino por la unidad.* Pues este *Quociente ultimo*, y los *Divisores encontrados* son los Divisores *simples* de la quantidad dada, los *Productos* de cada *dos*, de cada *tres*, de cada *quatro* de ellos, &c. serán sus Divisores *compuestos*.

49 Hayanse de encontrar todos los Divisores de 60. La operacion es como se sigue.

Dividendos.		*Divisores.*		*Quocientes.*
60	:	2	=	30
30	:	2	=	15
15	:	3	=	5

Dividolo primero por 2, y su Quociente

te 30, veo que tambien es divisible por 2, su Quociente 15 ya no es divisible por 2 sino por 3, su Quociente 5 ya no es divisible exâctamente por numero ninguno superior à la unidad.

Pues sus Divisores *simples*, ò *primeros* serán . . . . 2, 2, 3, 5.
Los Divisores *compuestos* serán

Los Productos de *cada dos.*	$2 \times 2 = 4$ $2 \times 3 = 6$ $2 \times 5 = 10$ $3 \times 5 = 15$	. . . . 4, 6, 10, 15.
Los Productos de *cada tres.*	$2 \times 2 \times 3 = 12$ $5 \times 2 \times 2 = 20$ $3 \times 5 \times 2 = 30$	. . 12, 20, 30.
El Producto de *todos quatro.*	$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$	. . . . . 60.

Porque $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$, en el qual Producto *cada cifra*, el Producto de *cada dos*, el Producto de *cada tres* son Factores, por consiguiente Divisores. A mas toda quantidad se puede dividir por sí misma, y assi el Producto de las *quatro* es tambien Divisor.

Facilitan mucho esta operacion las notas, que se ponen en la reduccion de Fracciones à su menor expression.

50 2°. Para encontrar el *mayor comun Divisor* de dos quantidades, ò que sea su *ma-*

mayor comun Medida de entrambas, tomese la Regla siguiente: *Dividase la mayor por la menor, y sino queda resta alguna, la quantidad menor es la mayor comun Medida, ò mayor comun Divisor.* Porque se mide assi, tomada una vez, y mide la mayor, tomada tantas veces, como indica el Quociente, y ninguna mayor quantidad, que esta menor, las puede medir entrambas. *Si queda alguna resta, dividase el Divisor por esta resta, y prosigase de esta suerte, dividiendo siempre el ultimo Divisor por la resta, hasta llegar à un Quociente exacto, y encontrado este, el ultimo Divisor es la mayor comun Medida de entrambas quantidades dadas.* Assi la mayor comun Medida de 45, y 63 es 9, de 256, y 48 es 16.

OPERACION.

```
45) 63 |1            48) 256 |5
    45                   240
    ---                  ---
    18) 45 |2            16) 48 |3
        36                   48
        ---                  ---
         9) 18 |2             0
            18
            ---
             0
```

51 Demuestrase en el primer Exemplo, porque el 9 se mide à sí mismo, luego tambien

bien à sus *Multiplices*, y à las *sumas de sus Multiplices*, por consiguiente mide al 18, que es su *duplo*, à $2 \times 18 + 9 = 45$, que es su *Quintuplo*, à $45 + 18 = 63$, *suma de su Quintuplo, y de su Duplo*, que es su *Septuplo*, luego es *comun Medida* de 45, y de 63, y es la *mayor*, porque si otro numero mayor que él, por exemplo 10, midiesse à 45, y 63, tambien mediria su diferencia de entrambos 18, y si midiesse 18, y 45, tambien mediria la diferencia del duplo de 18, y de 45, que es 9, y assi un numero mayor mediria otro menor.

Si hechas las divisiones arriba dichas para encontrar la *mayor comun Medida*, no se pudiesse llegar jamás à un Quociente exácto, sino quando se llegasse à un Divisor, que fuesse la unidad, es señal que no tienen otra mayor comun Medida, que la unidad, y que son *numeros Primeros entre sí.*

52 3°. *Reducir diferentes especies una à otra* es lo mismo, que dada una especie de *mayor* valor, exprimirla por quantidades de *menor* valor, ò ver quantas hace de estas, y esto es *reducir especies superiores à inferiores*; ò bien dadas quantidades de *menor* valor, ver quantas hacen de valor *mayor*, y esto es *reducir especies inferiores à superiores.*

Para *reducir quantidades superiores à inferiores, multipliquese la quantidad dada por el nu-*

numero de inferiores, que hacen una ſuperior, y el Producto ſerá la quantidad de eſpecie ſuperior expreſſada en eſpecies inferiores. Aſſi para reducir 24 *libras* à *ſueldos*, multiplico 24 por 20, numero de *ſueldos*, que hacen una libra, y el Producto 480 ſerá el numero de *ſueldos*, que hacen las 24 *libras*. Para reducir 25 *Varas* à *Pies*, ſupueſto que 3 *Pies* hacen una *Vara*, $3 \times 25 = 75$ ſerá el numero de *Pies*, que en dichas *Varas* ſe contienen. La razon de eſto es, porque ſupueſta una vara = 3 *Pies*, hai en 25 *Varas*, tantas veces 3 *Pies*, como es el numero de *Varas*: luego multiplicando el numero de *Varas* por el 3, tendré las *Varas* expreſſadas en el numero de *Pies*.

53 La inverſa de eſta operacion es la *Reduccion de eſpecies inferiores à ſuperiores*, para lo qual tomeſe la Regla ſiguiente. *Buſqueſe quantas eſpecies inferiores hacen una ſuperior, dividaſe la quantidad dada de eſpecies inferiores por eſte numero, y el Quociente ſerá el numero de eſpecies ſuperiores, que ſe contienen en el numero dado de eſpecies inferiores*, ò lo que es lo miſmo, *ſerá la miſma quantidad de eſpecies inferiores expreſſada en eſpecies ſuperiores.*

Hayanſe de reducir 366 *Pulgadas* à *Varas.* Porque la *Vara* contiene 3 *Pies*, y cada *Pie* 12 *Pulgadas*, contendrá la *Vara* 36 *Pulgadas*, pues divido 366 por 36, y el Quociente

ciente $10\frac{6}{36}$ me ſerá el numero de *Varas*, que hai en 366 *Pulgadas*.

54 4º. Ya diximos que *Quantidad mixta* es la que conſta de quantidades de diferentes eſpecies, pero que la una es parte de la otra. Para multiplicar pues dicha quantidad por un entero: *Multipliqueſe la eſpecie inferior de todas por dicho entero, y ſu Producto reduzgaſe à la eſpecie immediata ſuperior ſiguiente; ſi hai alguna reſta, pongaſe baxo la columna de eſpecies inferiores, y reſerveſe el numero de eſpecies ſuperiores para juntarlo al Producto ſiguiente*; y proſigaſe de la miſma ſuerte ſiempre de la eſpecie inferior à ſu immediata ſuperior.

EXEMPLO.

48v.	2p.	5pulg.	7lin.
			× 4
195	0	10	4

Para multiplicar 48 *varas*, 2 *pies*, 5 *pulgadas*, 7 *lineas* por 4, pongo las partidas como en el Exemplo. Empiezo 4×7=28 *lineas*, que reducidas à pulgadas hacen 2 *pulgadas*, y 4 *lineas*, pues pongo las 4 *lineas* baxo ſu reſpectiva columna, y reſervo las dos *pulgadas* para juntarlas al ſiguiente Producto. Proſigo, 4×5=20, à quien añadiendo 2, tengo 22 *pulgadas*, que reducidas à *pies*, es 1 *pie*, y 10 *pul-*

CAPITULO IV.

De las quatro Operaciones fundamentales de la Algebra.

56 HAſta ahora hemos hecho las operaciones de la Arithmetica en Numeros determinados, por consiguiente ſus operaciones, y reſultados ſolo exprimian quantidades particulares. Pero ahora hemos de hacer las operaciones univerſales, y en qualeſquiera generos de quantidades, por consiguiente *los Châractéres han de ſignificar indeterminadamente qualquier genero de quantidad, que queramos.* Las operaciones ſon las miſmas, que en la Arithmetica, eſto es, *Sumar*, *Reſtar*, *Multiplicar*, y *Partir*; ſe fundan en unos miſmos principios, aunque el modo de hacer eſtas operaciones es algo diferente en la Algebra, ò Calculo literal, que en la Arithmetica, lo que enſeñarémos al preſente. Pero para eſto es meneſter ſuponer algunas coſas.

ARTICULO PRIMERO.

Noticias previas para las Operaciones de la Algebra.

57 EN la Algebra las quantidades ſe exprimen por las letras del Alphabeto mayuſculas, ò minuſculas, *a*, *b*, *c*, *&c.* A, B, C, &c. Eſtas quantidades unas ſon *Poſitivas*, otras *Negativas.* Las Poſitivas ſon aquellas, à quienes precede el ſeñal +, como + *a*, y ſe pronuncia *plus*, ò *mas a*; las Negativas aquellas, à quienes precede el ſeñal —, y ſe pronuncia *minus*, ò *menos*, como — *a*, *minus a.* Quando à alguna quantidad no precedieſſe ſeñal alguno de eſtos, ſe ſobrentiende el Poſitivo +, por lo tanto *a* = + *a*.

58 Eſtas quantidades Poſitivas, y Negativas en ſubſtancia ſon las miſmas, ſino que los ſignos ſignifican el diferente modo de tomarſe, aſſi como en el Sumar, y Reſtar por la Arithmetica las partidas ſon las miſmas, ſolo que en la una operacion ſe *añaden*, y en la otra ſe *quitan.* Aſſi + *a* es la quantidad *a puesta*, que es la *Poſitiva*, — *a* es la quantidad *a quitada*; por lo tanto las quantidades

Negativas ſon, y ſe llaman *menos que nada*, ò *menos que cero* por ſus efectos. Pues ſi à uno que tiene 6 *ducados* ſe le juntan 0 *ducados*, ſe queda con el miſmo dinero, que tenia, porque 0 ni añade, ni quita; pero ſi ſe le junta — 2 *ducados*, ſe queda con 6 — 2 *ducados* = 4, por lo tanto — 2 es inferior à 0.

59 La quantidad, que ſe compone de muchas partes, ſeparadas unas de otras con los ſignos +, ò —, ſe llama quantidad *Complexa*, y dichas partes aſſi ſeparadas *Terminos* de la tal quantidad, conſten de una, ò de muchas letras. Aſſi $a + bc - d$ es una quantidad complexa, cuyos terminos ſon *a*, *bc*, *d*. Al contrario, ſi la quantidad ſe exprime por ſola una letra, ò bien por muchas, pero que no eſtán ſeparadas entre sí con los ſeñales +, ò —, es quantidad *Simple*, ò *Incomplexa*, como *ab*, $\frac{a}{b}$, *c*, *&c.* Las quantidades ſimples ſe llaman tambien *Monomas*, eſto es, de ſolo un termino; las complexas *Polinomias*; *Binomios*, ſi de dos; *Trinomios*, ſi de tres, &c.

60 Quando à alguna quantidad Algebraica le precede en el miſmo termino alguna cifra, ò numero, como $2a$, $3bc$, eſta cifra, ò numero ſe llama *Coeficiente* del tal termino, y ſignifica, *que la tal quantidad ſe ha de tomar tantas veces, quantas unidades eſte coeficiente exprime.* Aſſi en $2a$ el coeficiente es 2,

y

y ſignifica, que a ſe ha de tomar dos veces, ò lo que es lo miſmo la *ſuma* de la quantidad a dos veces tomada. Si la quantidad Algebraica no tubieſſe numero alguno por coeficiente, ſiempre ſe ſupone ſerlo la unidad; por lo tanto $a = 1a$: aunque los coeficientes algunas veces ſe ponen tambien por letras, y en general ſe puede decir, que toda letra junta à otra ſin eſtar ſeparada por los ſignos $+$, ò $-$, es coeficiente de la otra; por lo tanto en eſte producto ab, a es coeficiente de b, b de a.

61 Las quantidades ſimples, que ſe exprimen por unas miſmas letras eſcritas igual numero de veces, ſe llaman *Semejantes* entre sí, ſean, ò no ſean los miſmos los ſignos, y coeficientes numericos. Aſſi ſon quantidades ſemejantes eſtas $+a$, $-2a$, y eſtas otras $3ab$, $-5ab$. Pero una coſa hai, en que la expreſſion de las quantidades por Algebra ſe diferencia de la expreſſion por la Arithmetica comun, y es, que en la Arithmetica la ſignificacion de cada cifra depende del orden, en que en la expreſſion eſtá. Aſſi el 4 en eſta expreſſion 42 ſignifica quatro *decenas* de unidades, y en eſta 24 ſignifica ſolo quatro *unidades*; pero en la Algebra la ſignificacion de una letra no eſtá de eſta ſuerte atada, y aſſi ſignifica lo miſmo, eſté antes, ò deſpues, con tal que quede en un miſmo termino;

por lo tanto lo mismo es *ab*, que *ba*. De la misma suerte en los *terminos* de las quantidades complexas, que siempre significan lo mismo, esté el uno antes, ò despues del otro; por consiguiente será la misma $a - b$, que $-b + a$.

ARTICULO II.

Sumar quantidades Algebraicas.

62 CAso 1º. *Sumar quantidades semejantes de unos mismos signos positivos, ò negativos.*

Regla. *Pongase el signo comun à entrambas, sumense sus coeficientes, y añadanse una vez à esta suma las letras comunes.*

EXEMPLOS.

	$+ 3a$	$- ab$	$7a - 6x$
	$+ 8a$	$- 7ab$	$15a - 9x$
Sumas	$+ 11a$	$- 8ab$	$22a - 15x$

La demonstracion de esta Regla se toma de la misma naturaleza del *Sumar*, que es juntar en una muchas quantidades. Si à $3a$ añado $8a$ (sea lo que sea la quantidad a), la Suma será $11a$. Para las quantidades negativas es lo mismo. Si à una deuda de ab añado otra deuda de $7ab$ (sea la quantidad que sea ab) la suma

ſuma de las deudas ſerá $-8ab$. Pues las deudas, que diſminuyen la renta, tienen mucha ſemejanza con las quantidades negativas, que ſe oponen à las poſitivas, y las diſminuyen.

63 Caſo 2°. *Sumar quantidades ſemejantes, pero de diferentes ſignos.*

Regla. *Quiteſe el coeficiente menor del coeficiente mayor, pongaſe la reſta con el ſigno del coeficiente mayor, y añadanſele à eſta reſta la letra, ò letras comunes.*

EXEMPLO.

$$\begin{array}{lr} & 15x + 3d + 6c + 18 \\ & -\ 4x - 4d - 5c - \ 9 \\ \hline \textit{Suma} & 11x - \ d + \ c + \ 9 \end{array}$$

Quando hubieſſe muchas partidas de quantidades ſemejantes, unas poſitivas, y otras negativas, para mas limpieza, y expedicion, ſumenſe primero las poſitivas, deſpues las negativas, y ſumenſe deſpues entrambas ſumas.

EXEMPLO.

$$\begin{array}{lr} & +\ 5a \\ & -\ 8a \\ & +\ 7a \\ & -15a \\ \hline \textit{Suma de Poſitivas} & +12a \\ \textit{Suma de Negativas} & -23a \\ \hline \textit{Suma total} & -11a \end{array}$$

Sumar

64 Sumar es juntar muchas quantidades, y ver la quantidad, que resulta de esta junta. Siendo en este caso las unas *Positivas*, las otras *Negativas*, igual numero de las unas destruye igual numero de las otras: luego solo queda parte de la que tiene mayor coeficiente, y por esso *se pone solo la diferencia de entrambas con el signo de la mayor.* Y assi esta Suma de quantidades de *diferentes signos*, en substancia es una verdadera resta. Como si uno para averiguar su verdadera renta juntasse su renta, y sus cargos, lo que en limpio tendria, sería la diferencia de entrambos.

65 Caso 3º. *Sumar quantidades diferentes, ò desemejantes.*

Regla. *Escribanse todas, unas despues de otras, en una misma linea con sus proprios signos, y esta quantidad será la Suma de todas.*

EXEMPLOS.

	$2a$	$5a - 15x$
	$3b$	$3b + 4c$
Sumas	$2a + 3b$	$5a + 3b + 4c - 15x$

De este modo de obrar se ve, quan mas facil es Sumar por Algebra, que por la Arithmetica comun, pues en la Arithmetica es menester comenzar por la derecha, y llevar las decenas. En la Algebra se puede comenzar

por

por la derecha, ò por la izquierda, ò por el medio, como quiera, y no es menester llevar cosa.

66 Quando en una quantidad hai muchos terminos de quantidades semejantes, se abrevia mucho, reduciendo dichos terminos à uno. Por exemplo haya $4a + 5a$, se pone mas breve, poniendo unicamente $9a$, porque $4a+5a=9a$. Haya $5a-6a$, será mas breve $-a$, porque $5a-6a=-a$. Sean iguales dichas quantidades semejantes, pero una con signo +, otra con signo −, las quito entrambas, porque son ociosas, destruyendose unas à otras; pues $4a-4a=0$. Esto se llama *corregir la operacion*, ò limpiarla de terminos superfluos. Por esso dan algunos una Regla general para Sumar qualesquiera quantidades Algebraicas, y es: *Escribanse todas las partidas, unas despues de otras con sus proprios signos, borrense las que mutuamente se destruyen*, y essa será la *Suma total.*

ARTICULO III.

Restar quantidades Algebraicas.

67 Regla general. *Mudense los signos de los terminos de la quantidad, que se debe quitar. Sumese esta quantidad, los*

los ſignos aſſi mudados, con la quantidad, ò partida, de quien ſe ha de quitar, y la ſuma de entrambas aſſi pueſtas, es la Diferencia, ò la Reſta. Borrando los terminos, que mutuamente ſe deſtruyan.

EXEMPLOS.

	$5a$	$6a$	$4c - x + d$
	$2a$	$-3b$	$-5c + x - d$
Reſtas	$5a - 2a = 3a$	$6a + 3b$	$9c - 2x + 2d$

Demueſtraſe eſta Regla. Reſtar es quitar una quantidad de otra. Si la quantidad, que ſe debe *quitar*, es poſitiva, *mudandole el ſigno* ſe hace negativa, y *ſumandola, aſſi pueſta,* con la otra de quien ſe debe hacer la ſubſtraccion, ſe le junta una quantidad negativa, que le deſtruye igual parte poſitiva, por conſiguiente ſe le *quita* la tal quantidad poſitiva. Aſſi juntandoſele $-2a$ à $5a$, es deſtruirle à $5a$, $2a$, de donde $5a - 2a = 3a$.

De la miſma ſuerte, ſi la quantidad, que ſe ha de *quitar*, fueſſe negativa, mudandole el ſigno, ſe hace poſitiva, y juntandoſe à la otra, de quien ſe ha de hacer la ſubſtraccion, le deſtruye igual parte negativa, que es *quitarſela*. Aſſi quitando de $a - c$ eſta quantidad $-c$, ſerà la diferencia $a - c + c = a$. En general el *quitar* una quantidad poſitiva es lo miſmo, que *añadir* una negativa, y al contrario.

ARTI-

ARTICULO IV.

Multiplicar una quantidad Algebraica por otra.

68 POniendo el Multiplicador baxo del Multiplicando, ſe ha de conſiderar el Multiplicador, como ſi en cierta manera fueſſe un numero; por conſiguiente *ſe han de multiplicar todos los terminos del Multiplicando* (ſi tubieſſe muchos) *por cada termino del Multiplicador, y deſpues ſuman todos eſtos particulares Productos, y eſta ſuma ſerá el Producto total.* La multiplicacion ſe puede comenzar por la derecha, ò por la izquierda, como parezca, pues el valor de las quantidades Algebraicas no depende del orden en que eſtán. El Multiplicador, y el Multiplicando ſe han de conſiderar como *Factores* del Producto. Conſidereſe pues en entrambos Factores el *ſigno*, el *coeficiente*, y la *quantidad expreſſada por las letras*, para ver lo que ha de reſultar en el Producto.

69 Regla univerſal para los *Signos* del Producto. *Quando entrambos Factores tubieſſen un miſmo ſigno, poſitivo, ò negativo, el ſigno del Producto es ſiempre poſitivo +. Si tubieſſen diferentes ſignos, el ſigno del Producto*

es

es ſiempre negativo $-$. O bien en otros terminos *Semejantes. ſignos dan* $+$ *en el Producto*, *Diferentes* $-$. Aſsi $+\times+=-\times-=+$, $+\times-=-$. Eſto preſupueſto, para multiplicar quantidades ſimples, *Multipliquenſe entre sí los coeficientes, y deſpues las quantidades*, eſto es, *juntenſe en un termino todas las letras de entrambos Factores, y el termino, que de todo eſto reſulte, ſerá el Producto.*

EXEMPLOS.

	$+\ 4a$	$-\ 3ab$	$+d$	$-c$
	$\times+\ 5b$	$\times-\ 4cd$	$\times-b$	$\times+n$
Prods.	$+20ab$	$+12abcd$	$-db$	$-cn$

Si los Factores fueſſen quantidades complexas, ò que conſtan de muchos terminos, *la multiplicacion ſe hace de la miſma ſuerte, multiplicando ſucceſſivamente todos los terminos del Multiplicando por cada termino del Multiplicador*, y la ſuma de todos eſtos Productos ſerá el Producto total.

EXEMPLO.

$$\begin{array}{rl} & 3d+4a-5x \\ \times & 4c-6x \\ \hline & 12cd+16ac-20cx \\ - & 18dx-24ax+30xx \\ \hline \end{array}$$

Prodo. $12cd+16ac-20cx-18dx-24ax+30xx$

Co-

70 Como el *Multiplicar quantidades compuestas* sea una repiticion de la multiplicacion de quantidades simples, demonstrando la Regla de Multiplicar en quantidades simples, queda demonstrada en quantidades compuestas.

En orden à los Signos del Producto, supuesto el Multiplicando *positivo*, ò con el signo +, si el Multiplicador es tambien *positivo*, el Producto lo será tambien. Assi $+n \times +a = +na$. Pues multiplicar, *quando el Multiplicador es positivo*, es *tomar* tantas veces el Multiplicando, como unidades hai en el Multiplicador: luego esta quantidad positiva *tomada muchas veces*, como exprime el Multiplicador positivo, será una quantidad positiva, pues la suma de muchas quantidades positivas, ò de una muchas veces tomada, es una quantidad positiva. De donde $+n \times +a = na$.

Si el Multiplicando es *negativo*, y el Multiplicador tambien *negativo*, el Producto será aun *positivo*. Assi $-n \times -a = na$. Pues *siendo el Multiplicador negativo*, el multiplicar será *quitar* tantas veces el Multiplicando, quantas exprime el Multiplicador; pero el Multiplicando es una quantidad negativa, y una quantidad negativa no se puede quitar sino poniendo positivas: luego el Producto, que es la suma de essas posiciones, debe ser

un

un todo positivo; y será $-n \times -a = na$. De donde *Semejantes signos dan en el Producto* +.

Si el Multiplicando es *negativo*, y el Multiplicador *positivo*, el Producto será negativo, esto es, $-a \times n = -an$. Porque en este caso se *toma* el Multiplicando quantas veces exprime el Multiplicador, pero el Multiplicando es negativo: luego el Producto será la suma de una quantidad negativa muchas veces tomada, y la suma de muchas quantidades negativas, ò de una muchas veces tomada, es una quantidad negativa. Si el Multiplicando es *positivo*, y el Multiplicador *negativo*, vale tambien la misma razon, porque haciendo el Multiplicador Multiplicando, ò al contrario, el Producto es el mismo. Y assi *Diferentes signos dan — en el Producto.*

71 Es mui corriente entre los Mathematicos, en lugar del Producto poner solo los Factores separados entre sí por el signo de la multiplicacion. Assi en lugar de este Producto $ac - ad + bc - bd$ ponen sus Factores $(a + b) \times (c - d)$, ò bien de esta suerte $\overline{a+b} \times \overline{c-d}$. En lugar de $ac - dc$, ponen $\overline{a-d} \times c$. Si el Producto se exprime solo por dos Factores, como ab, se llama *Rectangulo*, ò Producto *de dos dimensiones*, ò bien *Plano* de a por b. Si se exprime por *tres* se llama *Solido*. Si todos los factores, ò raices son iguales, los Productos

tos ſe llaman *Potencias*, ò *Dignidades* de la raiz. Aſſi *aa*, *aaa*, *&c.* ſon Potencias de la raiz *a*.

72 *Las Potencias comunmente ſe exprimen poniendo ſolo la Raiz, y una cifra à la derecha algo mas arriba, que indica quantos ſon los factores, que la producen.* Aſſi

a	ſe llaman	1.ª	Potencia de la Raiz *a*, y ſe eſcriben	a^1
aa . . .		2.ª		a^2
aaa . .		3.ª		a^3
aaaa .		4.ª		a^4
aaaaa		5.ª		a^5
&c.		*&c.*		*&c.*

Eſtas cifras à la derecha algo mas arriba ſe llaman *Indices*, ò *Exponentes* de la Potencia, ò bien porque *exponen*, que Potencia ſea de la Raiz, ò bien porque exponen quantas veces dicha Potencia ſe habia de dividir por la Raiz, para llegar à un quociente, que ſea 1, ò bien porque *indican* quantuplicada ſea la razon, que tiene *dicha Potencia* à 1, de la razon de la Raiz à 1. Aſſi la razon de a^5 à 1 es quintuplicada de la razon de *a* à 1, como verémos tratando de las Razones; ò bien finalmente porque exponen quantas veces ſe habia de poner la expreſſion de la Raiz para exprimir eſſe Producto. Aſsi $a^2 = aa$. Lo que hemos dicho de las Potencias, ſe entiende tambien aun caſo que la Raiz ſe exprima por dos, ò mas letras,

tras, con tal que sea de solo un termino. Por lo tanto la 2ª Potencia de *ab* es $a^2 b^2 = aabb$.

73 *Las Potencias de una misma Raiz se multiplican entre sí, sumando los Exponentes de los factores, para formar un Exponente, que lo sea del Producto, escribiendo en este Producto solo la Raiz con este nuevo Exponente, guardando siempre la Regla general de los signos.* Assi $a^5 \times a^6 = a^{5+6} = a^{11}$, $a^{-4} \times a^{-3} = a^{-7}$, $b \times b = b^2$, $b^{-4} \times -b^3 = -b^{-4+3=-1} = -b^{-1}$. Porque sumar los Exponentes es lo mismo, que juntar las expressiones que ellos indican, y el juntar dichas expressiones es lo mismo, que multiplicar las quantidades.

Por lo tanto multiplicando *aa* por *aaa*, el Producto será *aaaaa*; pero esto es lo mismo que $a^{2+3} = a^5$. *Si las Potencias fuessen de diferentes Raices, la multiplicacion se hace por el methodo comun, juntando sus expressiones con sus proprios Exponentes.* De donde $a^2 \times b^2 = aabb$, $-a^3 \times -c^2 = +a^3 c^2 = aaacc$.

ARTICULO V.

De la Division de quantidades Algebraicas.

74 LA Division en las quantidades Algebraicas es como en la Arithmetica comun, que consiste en buscar un Quociente,

ciente, que exprima quantas veces el Divisor está contenido en el Dividendo, por consiguiente en buscar una quantidad, que multiplicada por el Divisor dé por producto el Dividendo. De esta sola explicacion se ve, que la Regla de los *signos* debe ser la misma en el Dividir, que en el Multiplicar, esto es, *que si los signos del Dividendo, y del Divisor fuessen semejantes, el signo del Quociente debe ser positivo, ò +; si fuessen desemejantes, el signo del Quociente debe ser negativo, ò —.*

75 Porque debiendo ser el Quociente una quantidad, que multiplicada por el Divisor, dé por producto el Dividendo, si entrambos signos de Dividendo, y Divisor son *positivos*, el signo del Quociente no puede ser negativo; porque à serlo, el *negativo* del Quociente multiplicado por el *positivo* del Divisor, daria por producto el *positivo* del Dividendo, contra la Regla de Multiplicacion. Si entrambos signos del Dividendo, y del Divisor son *negativos*, tampoco el signo del Quociente puede ser *negativo*, pues à serlo, el *negativo* del Quociente multiplicado por el *negativo* del Divisor, daria por producto el *negativo* del Dividendo, tambien contra la Regla de Multiplicacion.

Si los dos signos de Divisor, y Dividendo son *diferentes* entre sí, el signo del Quociente jamás puede ser *positivo*; porque à ser-

lo,

lo, si el del Dividendo es +, y el del Divisor —, — x + del Quociente daria + del Dividendo. Si el del Dividendo es —, y el del Divisor +, + del Divisor multiplicado por + del Quociente daria + al Dividendo; luego tambien en la Division, como en la Multiplicacion vale la Regla *Semejantes signos dan +, Diferentes —*. Esto presupuesto.

76 Regla general. *Pongase el Dividendo sobre el Divisor, separandolos entrambos por una linita. Borrense todas las letras comunes, si las hai*, esto es, *que se encuentren en todos los terminos del Dividendo, y del Divisor, dividanse los coeficientes de todos los terminos por una comun medida, y la quantidad assi puesta es el Quociente.*

Assi para dividir $10ab + 15ac$ por $20ad$, el Quociente en substancia es $\frac{10ab + 15ac}{20ad}$; pero para mayor limpieza, y para reducir la expression à otra mas breve, divido los tres coeficientes por 5 (que es su comun medida) quito la a, que se encuentra en todos los terminos, assi del Divisor, como del Dividendo, y se reduce la expression à $\frac{2b + 3c}{4d}$. Dividiendo $12aab$ por $4a$, el Quociente es $\frac{12aab}{4a} = 3ab$, $-a$ dividido por $+b = -\frac{a}{b}$, $\frac{-c}{-d} = +\frac{c}{d}$.

Las

77 *Las Potencias de la miſma Raiz ſe dividen entre sí, quitando el Exponente del Diviſor del Exponente del Dividendo*, aſſi como ſe multiplican, ſumando los Exponentes. Porque a^4 dividido por $a^2 = \frac{aaaa}{aa}$, y quitando aa del Diviſor, y del Dividendo, por ſer quantidades comunes, ſe reduce la expreſſion à ſer $aa = a^{4-2} = a^2$, $\frac{b^5\, a^3}{b^6\, a^4} = \frac{1}{ba} = b^{-1}\, a^{-1}$, $\frac{b^3}{b^3} = b^{3-3} = b^0 = 1$. *Pero ſi fueſſen Potencias de diferentes Raices, ſe dividen como las demás quantidades ſimples.* Aſſi a^4 dividido por $b^3 = \frac{a^4}{b^3}$.

78 Eſta Regla, que hemos dado para la Diviſion, aunque ſea univerſal, por mas terminos, que tengan el Diviſor, y el Dividendo, y ſea amás de eſto el comun modo con que ſe hace la Diviſion en la practica, y quando las quantidades ſon ſimples, ſea muchas veces del todo neçeſſaria, no obſtante hemos de confeſſar, que no es ſino una *Diviſion indicada*, y à veces es meneſter, que en realidad ſe haga à la larga la Diviſion, y aſſi es preciſo dar Reglas para ello.

Si el Diviſor, y el Dividendo fueſſen quantidades de muchos terminos, ſupueſto que el tranſtorno del orden de los terminos

no muda en el [illegible]ra su valor, y se pueden, assi la Division, como la Multiplicacion, empezar por donde se quiera; pero para proceder con orden tomese la Regla siguiente.

Regla: 1º. *Dispónganse los terminos, assi en el Dividendo, como en el Divisor, segun la mayor dimension de alguna de las letras* (si es possible) *que sea comun al Divisor, y al Dividendo, poniendo por primer termino el que tubiesse una letra de mayor dimension, y por segundo el de dimension immediatamente inferior, y assi successivamente.*

2º. *Dividase el primer termino del Dividendo por el primer termino del Divisor, y pongase el Quociente separado.*

3º. *Multipliquese este Quociente encontrado por todo el Divisor, y su producto restese del Dividendo.* Si no queda resta alguna, la operacion está acabada, y el Quociente encontrado es exacto.

Si hecha toda esta operacion, restasse algo, *esto será un segundo miembro de la Division*, y assi se han tambien de disponer los terminos segun las dimensiones de alguna letra, si se puede, ò si no dexarlos como se están, y dividase el primer termino del Dividendo por el primero del Divisor, y el Quociente será la segunda parte del Quociente total.

Multipliquese esta segunda parte del Quo-

ciente

ciente por todo el Divisor, y su producto restese del segundo miembro del Dividendo, si no queda resta alguna, se acabó la operacion; pero si queda, prosigase de la misma suerte, hasta que, ò no quede resta alguna, ò se vea, que siempre, por mas que se prosiga, quedará algo, y entonces veasé que lei guarda el Quociente, y se podrá proseguir sin fin, sin necessitar de la operacion, para proseguir el Quociente.

79 Algunos Exemplos aclaran esta Regla, que en substancia es la misma que en la Arithmetica comun.

Hayáse de dividir $2ab + a^2 + b^2$ por $a + b$. Dispongo el Dividendo segun la dimension de alguna letra, y assi encuentro, que en a^2 hai dos dimensiones de a, y en $2ab$ hai sola una dimension de a, pues lo dispongo de esta suerte $a^2 + 2ab + b^2$.

EXEMPLO I.

Divisor $a+b$)	$a^2 + 2ab + b^2$	($a+b$ *Quociente.*
Producto	$a^2 + ab$	
Resta, y nuevo Divdo.	$b^2 + ab$	
Producto	$b^2 + ab$	
	0	

Divido el primer termino del Dividen-

 do

do por el primero del Diviſor, eſto es, a^2 por a, el Quociente es a, que pongo en ſu lugar. Multiplico eſte Quociente por todo el Diviſor, pongo ſu produĉto a^2+ab baxo el Dividendo, y reſtandolo, me queda por diferencia, ò reſiduo, y ſegundo miembro de la Diviſion b^2+ab. Para ordenar tambien los terminos en el Diviſor, en lugar de $a+b$, pongo $b+a$. Divido el primer termino del Dividendo por el primero del Diviſor, eſto es, b^2 por b, el Quociente es b, que pongo con el miſmo ſigno al lado de la primera parte del Quociente ya encontrada. Multiplico el nuevo Quociente b por todo el Diviſor $b+a$, y el produĉto b^2+ab, lo quito del Dividendo, no reſta coſa; pues ſe acabó la Diviſion, y veo que el Quociente total es $a+b$.

80 Eſtas ſon en ſubſtancia todas las operaciones, que ſe executan en la Diviſion, que aunque no ſon dificiles, pero piden alguna paciencia.

EXEMPLO II.

$$x^2-2ax+a^2)\ x^3-3ax^2+3a^2x-a^3\ (x-a$$
$$x^3-2ax^2+a^2x$$
$$-ax^2+2a^2x-a^3$$
$$-ax^2+2a^2x-a^3$$
$$0$$

EXEM-

EXEMPLO III.

$$3a - 6)\ 6aaaa - 96\ (2aaa + 4aa + 8a + 16$$
$$\underline{6aaaa - 12aaa}$$
$$12aaa - 96$$
$$\underline{12aaa - 24aa}$$
$$24aa - 96$$
$$\underline{24aa - 48a}$$
$$48a - 96$$
$$\underline{48a - 96}$$
$$0$$

Eſtos Exemplos mueſträn, que alguna vez el Quociente, ſacandolo de eſta ſuerte, llega à ſer exacto, no habiendo reſta alguna, hecha la operacion; pero tambien à veces ſucede, que por mas que la operacion ſe proſiga, ſiempre hai alguna reſta, ò reſiduo, por conſiguiente el Quociente ſerá una *Série* infinita, ò de terminos ſimples, ò de fracciones, ò de Potencias de algun termino. Entonces comparando entre sí dos, ò tres terminos, obſerveſe que lei guardan (porque comunmente la ſiguen), y aſſi formando una Série ſegun la miſma lei, ſin hacer mas operaciones, ſe tendrá el Quociente tanto mas exacto, quanto mas ſe proſiga: ò ſi no deſpues de muchos terminos del Quociente, que ſe ha obtenido

do por la actual Diviſion, pongaſe el reſiduo por Numerador, y el Diviſor por Denominador.

81 Aquí hai algunos Exemplos, en que el Quociente forma una Série infinita. En el 1°. dividiendo 1 por $1-a$, ſe encuentra por Quociente $1+a+a^2+a^3+a^4$, &c. y entonces añadiendo ſucceſſivamente Potencias de a, ſe llega à mui grande exactitud, ſin neceſſitar de proſeguir la operacion.

EXEMPLO I.

$$
\begin{array}{llllll}
1-a) & 1 & (1+a+a^2+a^3+a^4, \text{\&c.} & & & \\
 & \underline{1-a} & & & & \\
 & & a & & & \\
 & & \underline{a-a^2} & & & \\
 & & & a^2 & & \\
 & & & \underline{a^2-a^3} & & \\
 & & & & a^3 & \\
 & & & & \underline{a^3-a^4} & \\
 & & & & & a^4 \ \text{\&c.}
\end{array}
$$

Con ſemejante operacion ſe encuentra, que

$$\frac{c^2}{c^2+2cy+y^2} = 1 - \frac{2y}{c} + \frac{3y^2}{c^2} - \frac{4y^3}{c^3} + \frac{5y^4}{c^4}, \text{\&c.}$$

$$\frac{1+x^2-2x^4}{1-x-x^2} = 1+x+3x^2+4x^3, \text{\&c.}$$

EXEM-

EXEMPLO II.

$$a+x)\ aa+xx\ \left(a-x+\frac{2x^2}{a}-\frac{2x^3}{a^2}+\frac{2x^4}{a^3},\ \&c.\right.$$

$$\begin{array}{l}
aa+ax \\
\hline
-ax+xx \\
-ax-xx \\
\hline
2xx \\
2xx+\dfrac{2x^3}{a} \\
\hline
-\dfrac{2x^3}{a} \\
-\dfrac{2x^3}{a}-\dfrac{2x^4}{a^2} \\
\hline
\dfrac{2x^4}{a^2}\ \&c.
\end{array}$$

En el Quociente de eſta ultima operacion ſe ve 1º. Que es una Série, que jamás ſe acabaria, y por conſiguiente infinita. 2º. Que los terminos van alternando en orden à los ſignos, ya poſitivos, ya negativos. 3º. Que deſde el tercer termino los coeficientes ſon 2, y que deſde el ſegundo ſe va en el numerador, formando una Série de Potencias de *x*, que es el ſegundo termino del Diviſor, y en el denominádor una Série de Potencias de *a*, que es el primero.

La

82 La demonſtracion de quanto hemos dicho ſobre la Regla de Dividir, es la general, que obrando de eſta ſuerte, el producto del Quociente por el Diviſor es igual al Dividendo; ò ſi el Quociente no es del todo exacto, como ſucede ſiendo una Série infinitá, la ſuma del producto del Diviſor por el Quociente + la ultima reſta es igual al Dividendo. Algunas veces en la practica para abreviar ſolo ſe indica la diviſion, y eſto ſignifica el Quociente. El ſeñal que indica la operacion es diferente en varios Authores; unos ponen ſolo dos punticos entre las dos quantidades, ſiendo la primera el Dividendo, la ſegunda el Diviſor. Aſſi $(a+b):(c+d)$ ſignifica el Quociente de $a+b$ dividido por $c+d$; otros Ingleſes en lugar de los dos punticos ponen $\div$.

CAPITULO V.

De las Fracciones comunes, assi Numericas, como Algebraicas.

ARTICULO PRIMERO.

Explicase, que cosa sea Fraccion, y su valor.

83 QUando en las Mathematicas decimos *uno*, *unidad*, 1, esta expression, como toda la de los Numeros, es mui abstracta, porque en realidad cada cosa es una tal unidad, como *una* Vara, *un* Pie, &c. y qualquier quantidad es *una* tal, y assi las *unidades* no son iguales. Qualquier Unidad pues se puede concebir como dividida en muchas partes iguales, y se pueden tomar alguna, ò algunas de essas partes. Assi una Vara se puede concebir como dividida en *tres* partes iguales, cada una de estas partes se llama *Pie*; pues la expression de alguna, ò muchas de estas partes, es lo que llamamos *Fraccion*, ò *Quebrado*.

84 La expression de qualquier Fraccion debe contener dos cosas, una que exprima

en

en quantas partes iguales ſe concibe como dividida la unidad, y ſe llama *Denominador*; porque da el nombre à la *qualidad* de partes: otra, que ſe llama *Numerador*; porque exprime *quantas de eſtas partes ſe toman*. La expreſsion pues de la Fraccion ſe pone de eſta ſuerte $\frac{2}{15}$ en donde el 15 es el Denominador, è indica, que la unidad ſe concibe dividida en *quince* partes iguales, y el 2 es el Numerador, que indica, que ſe toman *dos* de eſtas partes.

85 De aquí es, que *ſi el Numerador de una Fraccion es igual al Denominador, la Fraccion es igual à la unidad.* Aſsi $\frac{3}{3}=1$, $\frac{5}{5}=1$, $\frac{b}{b}=1$; porque ſi concebimos una Vara dividida en *tres* partes, y las tomamos todas *tres*, es cierto, que tomamos toda *una* Vara.

Si el Numerador es mayor, que el Denominador, la Fraccion es mayor, que la unidad. Aſsi $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$, $\frac{6}{3}=2$, $\frac{8}{6}=1\frac{2}{6}$; porque ſe toman quantas partes ſon ſuficientes para la unidad, que ſon las iguales al Denominador, y *mas*; por eſte exceſſo es mayor, que la unidad. Pero eſtas dos eſpecies de Fracciones de Numerador *igual*, ò *mayor*, que el Denominador, ſe llaman, y ſon *Fracciones impropias.*

Si el Numerador es menor, que el Denominador, la Fraccion es menor, que la unidad, y ſolo en eſte caſo es *propria Fraccion*, por ſer

ſer unicamente parte de la unidad, como $\frac{3}{4}$. Quantidad *Mixta* es aquella en la qual la una parte es uno, ò muchos Enteros, y la otra una Fraccion, como $3\frac{1}{4}$, $12\frac{2}{6}$, $1\frac{12}{13}$, $a+\frac{1}{3}$.

86 *Una Fraccion no muda ſu valor, por conſiguiente ni ſe aumenta, ni diſminuye, por mas que ſe multipliquen, ò dividan Numerador, y Denominador por una miſma quantidad.* Porque $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ ſon Fracciones iguales, pues cada una de ellas es la mitad de la unidad; pero $\frac{1}{2}=\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{2}{4}$. Aſſi multiplicando por 2 Numerador, y Denominador de $\frac{1}{2}$, la Fraccion $\frac{1\times 2}{2\times 2}$ tiene el miſmo valor, que antes. Mas: dividanſe en la Fraccion $\frac{4}{8}$ Numerador, y Denominador por 2, ſe reducirá à $\frac{2}{4}$; pero $\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$: luego dividiendo Numerador, y Denominador por una miſma quantidad, el valor ſiempre es el miſmo. En Algebra es $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}=\frac{ad}{bd}=\frac{a:d}{b:d}$.

87 *El valor de una Fraccion es igual al Quociente del Numerador dividido por el Denominador*, que es decir, que $\frac{3}{4}$ de un eſcudo es igual al quociente, que reſulta, dividiendo 3 eſcudos por 4. Exprimaſe por q el quociente de 3 dividido por 4. Como el Dividendo contiene al Diviſor de la miſma ſuerte, que el Quociente à la unidad (1), la miſma proporcion tendrá el dividendo 3 al diviſor 4, que tiene el quociente q à 1; pero 3

es

es tres quartos de 4; porque haciendo de 4 *quatro* partes, 3 contendrá las *tres*, luego tambien q el quociente será las *tres quartas* de la unidad, ò 1; pero la Fraccion $\frac{3}{4}$ es tambien tres quartas de la unidad, luego la Fraccion es igual al Quociente, que resulta del Numerador dividido por el Denominador.

De ahí viene en la Algebra el reducir una Fraccion à Série finita, ò infinita, dividiendo el Numerador por el Denominador, y el quociente, que suele ser una Série, es igual à la Fraccion. Si despues de una division de Enteros hai alguna resta, que ponemos à modo de Fraccion, y queremos averiguar su valor, reduzgase el Numerador à especies inferiores, y dividase assi reducido por el Denominador, su Quociente nos dará el valor de la Fraccion.

Explicadas ya las Fracciones, y su valor, todo lo que acerca de ellas ocurre para la practica, es *Reducirlas* à expressiones mas oportunas à nuestro intento, guardando siempre un mismo valor, y hacer con ellas las operaciones comunes de *Sumar*, *Restar*, *Multiplicar*, y *Partir*.

ARTI-

ARTICULO II.

De la Reduccion de Fracciones à otras Expressiones.

EN general *reducir* una quantidad à otra es *exprimir dicha quantidad de otra suerte*, de manera que aunque las expressiones sean diferentes, el valor es el mismo.

88 PROBLEMA I. *Reducir un Entero à Fraccion de un determinado Denominador.*

Regla. *Multipliquese el Entero por el Denominador dado, poniendo el producto por Numerador, y por Denominador el Denominador dado, la Fraccion que resulte, será el Entero reducido à Fraccion del determinado Denominador.*

Assi reduciendo 65 à Fraccion, que tenga por Denominador 32, será $\frac{65 \times 32}{32} = \frac{2080}{32}$. En Algebra, hayase de reducir $a + b$ à Fraccion, que tenga por Denominador c, será $\frac{ac + bc}{c}$. Y como qualquier numero, y quantidad se puede multiplicar por otra, y dividir por ella, qualquier quantidad se puede reducir à qualquier genero de Fracciones. Ya se ve, que si lo que se reduce es Enteros, la Frac-

Fraccion ſerá impropria. Eſta Regla ſe funda en que multiplicando Denominador, y Numerador por una miſma quantidad, la Fraccion queda la miſma; pues ſiendo $65 = \frac{65}{1}$, ſerá

$$\frac{65 \times 32}{32} = \frac{65 \times 32}{1 \times 32} = \frac{2080}{32} = 65.$$

89 PROBLEMA II. *Reducir una quantidad Mixta à Fraccion impropria.*

Regla. *Como la quantidad Mixta conſta de Entero, y Fraccion: Multipliqueſe el Entero por el Denominador de la Fraccion, ſumeſe eſte producto con el Numerador, à eſta ſuma pongaſele por Denominador el de la Fraccion, y quedará la quantidad Mixta reducida à Fraccion.*

Aſſi reduciendo las quantidades Mixtas $4\frac{1}{5}$, $3\frac{1}{3}$, $6\frac{1}{10}$; $a + \frac{b}{c}$, $3x - \frac{b^2}{2n}$ à Fracciones impropias, tendrémos $4\frac{1}{5} = \frac{4 \times 5 + 1}{5} = \frac{21}{5}$,

$$3\frac{1}{3} = \frac{3 \times 3 + 1}{3} = \frac{10}{3},\ 6\frac{1}{10} = \frac{6 \times 10 + 1}{10} = \frac{61}{10},$$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c},\ 3x - \frac{b^2}{2n} = \frac{6xn - b^2}{2n}.$$

Eſta operacion no es otra coſa, que reducir el Entero à Fraccion del miſmo Denominador de la parte fraccional, y ſumar ambas Fracciones, como verémos deſpues.

90 PROBLEMA III. *Reducir una Fraccion impro-*

impropria à una quantidad Mixta, ò Entero.

Regla. *Dividase el Numerador por el Denominador, y el Quociente será el Entero, ò la quantidad Mixta.*

Assi $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$, $\frac{162}{3} = 54$, $\frac{ab + c^2}{b} = a + \frac{c^2}{b}$.

91 PROBLEMA IV. *Reducir dos, ò mas Fracciones de diferentes Denominadores à un mismo Denominador.*

Regla. *Multipliquese cada Numerador por el producto de todos los otros Denominadores, excepto el proprio, y estos productos serán los nuevos Numeradores: Multipliquense todos los Denominadores entre sí, y su producto será el Denominador comun.*

Hayanse de reducir à un mismo Denominador las Fracciones $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$, el Denominador comun será $c \times d = cd$, el Numerador de $\frac{a}{c}$ reducida, será $a \times d$, y el de $\frac{b}{d}$ será $b \times c$, y las Fracciones reducidas serán $\frac{a \times d}{c \times d} = \frac{a}{c}$, $\frac{b \times c}{d \times c} = \frac{b}{d}$. Que estas Fracciones tengan un mismo Denominador se ve, porque en entrambas es cd. Que entrambas tengan un mismo valor que antes, se demuestra, porque $\frac{ad}{cd} = \frac{a \times d}{c \times d}$; pero una Fraccion no muda su valor, por mas que se multipliquen, ò dividan

Nu-

Numerador, y Denominador por una misma quantidad, como en este caso por d: luego $\frac{a}{c} = \frac{a \times d}{c \times d}$.

En Fracciones Arithmeticas es lo mismo, assi reduciendo à un mismo Denominador las Fracciones Arithmeticas $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{6}{7}$, tendrémos

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2 \times 7}{4 \times 2 \times 7} = \frac{42}{56}.$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 4 \times 7}{2 \times 4 \times 7} = \frac{28}{56}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{6 \times 2 \times 4}{7 \times 2 \times 4} = \frac{48}{56}$$

Esta reduccion de Fracciones sirve mucho, ya para las operaciones comunes, como verémos, ya para ver si una Fraccion es mayor, que otra; porque puestas estas dos Fracciones $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{7}$, no se ve facilmente qual sea mayor; pero si se reducen à un mismo Denominador $\frac{21}{63}$, $\frac{45}{63}$, facilmente veo, que $\frac{45}{63}$ $(=\frac{5}{7})$ es mayor, que $\frac{21}{63}$ $(=\frac{3}{9})$.

92 PROBLEMA V. *Reducir una Fraccion à menor expression, ò menos terminos.*

Regla. *Busquese alguna comun medida, ò divisor, que divida Numerador, y Denominador exactamente, y sin resta, los Quocientes respectivos serán Numerador, y Denominador de la Fraccion ya reducida à menor expression.*

Si

Si la quantidad por quien entrambos se dividen, fuesse su *mayor* comun medida, la Fraccion se reducirá à la *menor expression possible*. Si no tienen alguna comun medida, excepto la unidad, ya no puede la Fraccion reducirse à expression menor.

Hayanse de reducir à menor expression las Fracciones $\frac{4}{12}$, $\frac{36}{48}$, $\frac{2520}{7560}$, $\frac{75abc}{125bcx}$. Dividiendo Numeradores, y Denominadores por su mayor comun medida, serán $\frac{4}{12} = \frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3}$, $\frac{36}{48} = \frac{36:12}{48:12} = \frac{3}{4}$, $\frac{2520}{7560} = \frac{2520:2520}{7560:2520} = \frac{1}{3}$, $\frac{75abc}{125bcx} = \frac{75abc:25bc}{125bcx:25bc} = \frac{3a}{5x}$.

Las Fracciones, ò bien incommensurables, ò bien que no tienen otra comun medida, que la unidad, como $\frac{357}{4652}$, ya no se pueden reducir à menor expression; y assi para ver si alguna Fraccion es reducible, es menester acudir à encontrar alguna comun medida de Numerador, y Denominador.

93 No obstante la practica enseña algunas Reglas particulares.

1º. *Todo numero Par se puede dividir por 2*; de donde si Numerador, y Denominador son numeros pares, la Fraccion se puede reducir à expression menor, dividiendolos por 2.

2º. *Todo numero que acaba en 0, se puede dividir por 5, y por 10*; de donde si en Numerador, y Denominador hubiesse à la fin

alguno, ò algunos ceros, la Fraccion se reduce à menor expresion, quitando igual numero de ceros de entrambos; porque esto es dividirlos por 10, por 100, &c. Por lo tanto $\frac{1000}{4000} = \frac{1}{4}$.

3°. *Todo numero que acaba en 5, es divisible por 5*; porque, ò es cinco, ò su multiplice.

4°. *El numero 3 divide qualquier quantidad, quando la suma de las cifras, de que se compone, tomadas separadamente, forman un numero, que es divisible por 3.* Asi 3 divide exactamente 471, porque $4 + 7 + 1 = 12$, que es divisible por 3.

ARTICULO III.

De las quatro Reglas Arithmeticas por Fracciones comunes.

94 Como las Fracciones, asi propias, como impropias son quantidades, se pueden hacer con ellas todas las operaciones de la Arithmetica, y Algebra; por lo tanto se pueden Sumar, para ver juntas que quantidad hacen; se pueden Restar, para encontrar su diferencia; se pueden Multiplicar, para hallar su producto; y final-

finalmente se pueden Dividir, para saber quantas veces la una contiene la otra.

95 PROBLEMA I. *Sumar Fracciones, assi Arithmeticas, como Algebraicas.*

Regla. *Reduzganse (si no lo están ya) à un mismo Denominador. Sumense los Numeradores, y à esta suma pongasele por Denominador, el Denominador comun. La Fraccion que resulte, será la Suma de las Fracciones dadas.*

Sumense $\frac{3}{5}$ con $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{15}$ con $\frac{4}{13}$, $\frac{a}{b}$ con $\frac{d}{c}$, y $\frac{e}{b}$, serán $\frac{3}{5} + \frac{4}{6} = \frac{18+20}{30} = \frac{38}{30} = 1\frac{8}{30} = 1\frac{4}{15}$, $\frac{3}{15} + \frac{4}{13} = \frac{39+60}{195} = \frac{99}{195} = \frac{33}{65}$, $\frac{a}{b} + \frac{d}{c} + \frac{e}{b} = \frac{acb + b^2 d + bce}{b^2 c}$.

Si las quantidades, que se han de sumar, fuessen Mixtas, *sumense primero los Enteros, y reduciendo las Fracciones, juntese su suma à la de los Enteros.*

Assi $4\frac{5}{7} + 16\frac{3}{4} = 20 + \frac{20+21}{28} = 21\frac{13}{28}$.

96 PROBL. II. *Restar una Fraccion de otra.*

Regla. *Reducidas à un mismo Denominador, restense los Numeradores, à la diferencia desele por Denominador el Denominador comun, y esta Fraccion será la Diferencia de entrambas Fracciones dadas.*

Assi $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}$, $\frac{x}{45} - \frac{x}{4} = \frac{4x-45x}{180} = -\frac{41x}{180}$, $5 - \frac{1}{3} (= 4\frac{3-1}{3}) = \frac{15-1}{3} = 4\frac{2}{3}$.

97 Para mayor inteligencia de la Multiplicacion, y Division de las Fracciones se han de presuponer los dos Lemmas siguientes.

LEMMA I. *Si el Numerador de una Fraccion se aumenta, quedando siempre el mismo Denominador, el valor de la Fraccion se aumenta con la misma proporcion, que dicho Numerador.*

Demos que en esta Fraccion $\frac{1}{3}$ se vaya aumentando el Numerador de esta suerte $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$. Es cierto, que $\frac{2}{3}$ es el duplo de $\frac{1}{3}$, porque su Numerador es tambien el duplo del de la otra, quedando el mismo el Denominador, por la misma razon $\frac{3}{3}$ es su triple. Y assi para tomar tres veces esta Fraccion $\frac{1}{3}$ no hai sino multiplicar su Numerador por 3, quedando el Denominador el mismo: de donde, como el *multiplicar* una quantidad es *tomarla muchas veces*, sale la siguiente:

Regla. *Para multiplicar una Fraccion por un Entero, multipliquese su Numerador por dicho Entero, al producto pongasele por Denominador el de la Fraccion, y esta nueva Fraccion será el Producto de la Fraccion dada por el Entero.*

98 LEMMA II. *En una Fraccion, quedando el Numerador el mismo, su valor se disminuye con la misma proporcion, que se aumenta el Denominador.*

Sea esta Fraccion $\frac{1}{1}$. Si à su Denominador lo aumento de una unidad, será $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, y su valor será la mitad menor. Si à su Deno-

mina-

minador lo aumento de 2, será $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$, que será un tercio de la primera, ò el Quociente de la primora dividida por 3: luego en general, para dividir una Fraccion por un Entero es

Regla. *Multipliquese el Denominador por el Entero, pongase este producto por Denominador, dexandole el Numerador mismo, y esta Fraccion será el Quociente.*

Mas como $\frac{1}{2} \times 2 = \frac{1 \times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1 = \frac{1}{2:2} = 1$, y *una Fraccion se puede multiplicar por un Entero de dos suertes, ò bien dexando el mismo Denominador, multiplicando el Numerador por el Entero, ò bien dexando el mismo Numerador, dividiendo por el Entero el Denominador dado.* Deshaciendo lo hecho, ò de la operacion inversa se sigue, que *una Fraccion se puede tambien de dos suertes dividir por un Entero, ò bien dividiendo por él el Numerador, dexando intacto el Denominador, ò bien dividiendo este, quedando el Numerador el mismo que antes.*

Pues $\frac{6}{7} : 2 = \frac{6:2}{7} = \frac{3}{7} = \frac{6}{7 \times 2} = \frac{6}{14}$.

Atendiendo, que una Fraccion tanto mas *crece*, quanto mas se *disminuye* el Denominador, y tanto mas *disminuye* su valor, quanto mas el Denominador *crece*, quedando siempre el Numerador el mismo, se sigue, que $\frac{1}{\infty} = 0$, y $\frac{1}{0} = \infty$, las quales locuciones, corrientes entre los Mathematicos, no se entienden con todo el rigor; porque de otra suerte se seguiria, que $1 = \infty \times 0 = 0$, que es fal-

falso, sino que $\frac{1}{\infty}$ es una Fraccion tan tenue, que, aunque en el calculo se desprecie del todo, ò se *suponga* $=0$, no induce error alguno notable, y assi dicen $\frac{1}{\infty}=0$, y al contrario, que dividida una quantidad por otra tan pequeña, que *apenas* se diferencie de o, el Quociente, que exprime *quantas veces* el Denominador se incluye en el Numerador, ha de ser *infinito*; por lo tanto dicen $\frac{1}{0}=\infty$, en donde el Denominador o indica una quantidad tan tenue, que *apenas* se diferencia de o. Esto supuesto.

99 PROBLEMA III. *Multiplicar Fracciones entre si.*

Para entender bien la multiplicacion de Fracciones entre si, y la razon en que se funda, es menester tener bien presente lo que es el Multiplicar, que es tomar el Multiplicando tantas veces, como *unidades* hai en el Multiplicador; de donde si multiplicamos una Fraccion por la unidad, el Producto será igual al mismo Multiplicando, ò será unicamente la misma Fraccion; si la multiplicamos por un numero *mayor*, que la unidad, por exemplo por 2, el Producto será *mayor*, que la Fraccion, pues será su duplo; pero si la multiplicamos por una quantidad *menor*, que la unidad, como es qualquier Fraccion propria, el Producto será *menor*, que la Fraccion, que se multiplica, de la misma suerte

que

que la Fraccion, que es el Multiplicador, es menor que la unidad; por lo tanto toda quantidad multiplicada por una Fraccion propria, dará un Producto *menor*, que el Multiplicando.

Assi si se multiplica $\frac{2}{3}$ por la mitad de la unidad $\frac{1}{2}$, el Producto será la mitad de dos tercios; pues el Multiplicando ha de estar en el Producto de la misma suerte, que la unidad está en el Multiplicador; pero sola la mitad de la unidad está en el Multiplicador $\frac{1}{2}$: luego tambien sola la $\frac{1}{2}$ del Multiplicando estará en el Producto; y assi el Producto solo será la mitad del Multiplicando.

Si el Multiplicador es $\frac{1}{3}$, el Producto solo será un tercio del Multiplicando, si es $\frac{2}{3}$ será dos tercios: luego en substancia *este multiplicar una Fraccion por otra Fraccion será dividir la Fraccion, que se multiplica, en tantas partes iguales, como indica el Denominador del Multiplicador, y tomar de estas partes tantas, como exprime el Numerador del Multiplicador mismo.* Pero una Fraccion se divide por un Entero, multiplicando el Denominador por él, y se multiplica, ò se toma tantas veces, como indica el Entero, multiplicando el Numerador de la Fraccion por dicho Entero: luego

Regla general. *Para Multiplicar una Fraccion por otra Fraccion, multipliquense entrambos*

bos Numeradores entre sí, y este producto será el Numerador del Producto; multipliquense tambien entre sí entrambos Denominadores, y este producto será el Denominador correspondiente.

Assi $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{12}$, $\frac{25}{360} \times \frac{3}{4} = \frac{75}{1440} = \frac{5}{96}$,

$$\frac{a-x}{d} \times \frac{a}{c} = \frac{a^2 - ax}{dc}.$$

100 PROBLEMA IV. *Dividir una Fraccion por otra.*

Regla. *Inviertase el Divisor, haciendo del Numerador Denominador, y del Denominador Numerador; multipliquese el Divisor assi inverso por el Dividendo, y su producto será el Quociente.*

De esta suerte $\frac{4}{5} : \frac{3}{4} = \frac{4 \times 4}{5 \times 3} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{cb}.$$

No hai que estrañar, que algunas veces el Quociente sea mayor, que el Dividendo, como el quociente de $\frac{4}{5} : \frac{3}{4} = 1\frac{1}{15}$, que es mayor, que $\frac{4}{5}$; porque el quociente solo debe exprimir, quantas veces el Dividendo incluye el Divisor; y aunque en las Fracciones proprias el Dividendo sea menor, que la unidad, no obstante puede contener una, ò muchas veces otra Fraccion inferior, por consiguiente será el quociente 1, 2, &c.

La Demonstracion de esta Regla es la general de la Division, que el Quociente debe

ser

ser una quantidad, que multiplicada por el Divisor, dé por producto el Dividendo. Assi el Quociente $\frac{ad}{cb}$ multiplicado por el Divisor $\frac{c}{d}$, dará por producto el Dividendo $\frac{ad}{cb} \times \frac{c}{d} = \frac{adc}{cbd} = \frac{a}{b}$.

Estas dos Reglas de Multiplicacion, y Division de Fracciones se estienden tambien à las Fracciones impropias; de donde para multiplicar, y dividir quantidades Mixtas es buen methodo el reducirlas à Fracciones impropias, Comunes, ò Decimales; pero adviertase, que el producto de una Vara *Linear* por otra *Linear*, es una Vara *Quadrada*; el de un Pie *Linear* por otro, es un Pie *Quadrado*, &c. De donde siendo el Pie *Linear* $\frac{1}{3}$ de Vara *Linear*, será el Pie *Quadrado* $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ de Vara *Quadrada*; assimismo una Pulgada será $\frac{1}{12 \times 12} = \frac{1}{144}$ de Pie *Quadrado*, y $\frac{1}{144 \times 9} = \frac{1}{1296}$ de Vara *Quadrada*.

Mas si se multiplica una Vara *Quadrada* por una *Linear*, el producto será una Vara *Cubica*; por consiguiente el Pie *Cubico* será $\frac{1}{27}$ de Vara *Cubica*, &c.

Esto se ha de tener presente, para evitar equivocacion en la Multiplicacion, y Division de Quebrados.

CAPI-

CAPITULO VI.

De las Fracciones Decimales.

101 LAS *Fracciones Decimales* ſon las mas utiles para el Calculo, por ſer mas expedito el modo de obrar por ellas, y lograrſe con eſte methodo mayor limpieza, y conciſion, que con las Fracciones comunes.

ARTICULO PRIMERO.

Explicanſe las Fracciones Decimales, y ſu formacion.

102 QUalquier quantidad, aſſi entera, como quebrada, reteniendo el miſmo valor, ſe puede reducir à qualquier genero de Fracciones, eſto es, à Fraccion de qualquier Denominador determinado, con tal que ſe le buſque proporcionado Numerador: luego tambien ſe podrá reducir à una Fraccion, que tenga por Denominador 10, ò alguna Potencia de 10, eſto es, 100, 1000, 10000, &c. *Eſtas Fracciones pues que tengan por Denominador* 10, *ò alguna Poten-*

cia

cia de 10, *son las que llamamos Fracciones Decimales*.

103 En esta materia de *Decimales* el Entero, ò la unidad se concibe como dividida en *diez* partes iguales, assi $1 = \frac{10}{10}$, cada una de estas partes se concibe tambien dividida en otras *diez* partes, que por consiguiente serán *Centesimas* del entero, cada una de estas diez ultimas partes, decimas de las decimas, ò centesimas del entero, se concibe tambien dividida en otras *diez* partes, que serán ya *Milesimas* del entero, y assi al infinito, prosiguiendo à *Diezmilesimas*, *Cienmilesimas*, *&c.*

104 Esto presupuesto, siendo qualquier Fraccion comun igual al quociente, que resulta por la actual division del Numerador por el Denominador, si la Fraccion es propria, esta division no tendrá lugar, quedando el Numerador en linea de Enteros, ò de unidades, y assi se habrá este Numerador de reducir à especies inferiores, que en este caso es à sus *partes decimas*; por lo tanto, siendo cada unidad *diez decimas*, añadiendo al Numerador un 0, tendré el numero de decimas à quien equivale, y haciendo la actual division, la figura que salga en el quociente, indicará *quantas de estas decimas* correspondan à cada unidad del Denominador, que en este caso es el Divisor.

Si

Si hecha esta primera division, resta algo, esta resta serán *decimas partes* de la unidad, y como el numero de esta resta es menor, que el numero del Divisor, para que la division se pueda proseguir, se habrán de reducir estas decimas partes à especies inferiores, esto es, añadiendo un o à sus decimas, que por consiguiente serán ya *centesimas* de la unidad, y asi haciendo la division, la figura que salga en el quociente exprimirá *centesimas* de la unidad; y prosiguiendo de la misma suerte, si hai alguna resta, la otra indicará *milesimas*, &c.

Asi $\frac{3}{4}$ es igual al quociente que resulta, dividiendo 3 por 4; pero si el Numerador 3 se queda en expresion de *unidades*, la division no se puede executar: mas teniendo presente, que 3 *unidades* es lo mismo que 30 *decimas* de la unidad, y que añadiendo al Numerador (3) un o, tengo el numero de *decimas* à que equivale, lo añado, y haciendo la division, el quociente 7 que sale, exprimirá 7 *decimas*, y la resta 2, serán 2 *decimas*, que se habrán de dividir aun por 4: Pero atendiendo que el numero de *decimas* que resta, es menor que el Denominador, ò Divisor, lo reduzgo à especies inferiores, esto es, añadiendo un o à sus decimas, que por consiguiente serán *centesimas* de la unidad, y haciendo la division, la figura 5, que sale en el

quo-

quociente, exprimirá *centesimas* de la unidad, y no habiendo ya resta alguna, será $\frac{3}{4} = \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$; pero $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$: luego $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{70}{100} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

En esta ultima expression $\frac{75}{100}$ reparo (y es lo que sucede en toda Fraccion Decimal propria) que siempre *el Denominador de qualquier Fraccion Decimal propria consta precisamente de la unidad* (1), *y de tantos ceros, como figuras, ò chàractéres hai en el Numerador.*

Esto assentado, viendo quantos chàractéres hai en el Numerador, será ocioso poner el Denominador, y assi se omite, por tenerse presente, que es 1 con tantos ceros, quantas figuras el Numerador contiene. Assi $\frac{547}{1000}$ = .547, poniendo un puntico antes, para indicar, que las figuras que siguen al puntico, son *Numerador de Decimales*, y no cifras de Enteros.

105 Es digno de repararse en las figuras, que exprimen las Decimales, que assi como las figuras, significando Enteros, aumentan de diez su valor, ò crecen *en el valor decuplo*, quanto mas van distando ácia la izquierda de la figura, que exprime las unidades; assimismo las figuras, que significan Decimales, van *disminuyendo* su valor en *proporcion subdecupla*, ò *diez veces menos*, quanto mas van distando ácia la derecha de la cifra, que significa unidades.

Assi

Aſſi en eſta partida 65.43, las 65 ſignifican los Enteros, las .43 ſignifican las Decimales, la cifra que exprime las *unidades* es el 5, el 6 ſignifica ſeis *decenas* de unidades, eſto es 60, porque diſta un grado *ácia la izquierda* de la cifra (5) de unidades, el 4 nó ſignifica ya unidades, ſino *decimas* partes de la unidad, que en eſte caſo ſon quatro (4), el 3 ya ſignifica menos, porque ſignifica *centeſimas*, y todo junto .43 ſignifica quatro decimas, y tres centeſimas partes de la unidad, que es quarenta y tres *centeſimas*; porque $.43 = \frac{4}{10} + \frac{3}{100} = \frac{40}{100} + \frac{3}{100} = \frac{43}{100}$.

En eſta Tabla ſe ve el valor de cada cifra, ſegun ſu reſpectiva diſtancia de la cifra de *unidades*.

Cienmiles.	*Diezmiles.*	*Miles.*	*Centenas.*	*Decenas.*	UNIDADES.	*Decimas.*	*Centeſimas.*	*Mileſimas.*	*Diezmileſimas.*	*Cienmileſimas.*
6	5	4	3	2	(1)	2	3	4	5	6
Numeros		*Enteros*			,		*Partes*		*Decimales.*	

106 Leido un Exemplo de Enteros, y Decimales, ſe aprende à leer qualquier otro. Las partidas Decimales ſe leen, ò bien tomando cada cifra ſeparadamente, dandole la denominacion de la qualidad de partes, que exprime, y en eſte caſo la partida 345.6734 ſe

se lee assi *trescientas quarenta y cinco* (unidades) *seis decimas, siete centesimas, tres milesimas, quatro diezmilesimas partes de la unidad*, ò de uno; ò bien mas breve, como se acostumbra, leyendo las tales cifras como si fuessen Enteros, tomando la denominacion de la qualidad de partes, que significa la ultima cifra, assi dicha partida .6734 se lee *seis mil setecientas treinta y quatro diezmilesimas*, por exprimir diezmilesimas la ultima cifra 4.

La razon de este ultimo modo de leer, que es el comun, es, porque $.6734 = \frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000}$, reduciendo pues todas estas Fracciones à un mismo Denominador, esto es al de la ultima, serán $\frac{6}{10} = \frac{6000}{10000}$, $\frac{7}{100} = \frac{700}{10000}$, $\frac{3}{1000} = \frac{30}{10000}$, $\frac{4}{10000}$, sumandolas todas, serán $\frac{6734}{10000} = .6734$.

ARTICULO II.

De las quatro Operaciones Arithmeticas por las Fracciones Decimales.

107 PAra obrar por las Fracciones Decimales, es menester reducir las Fracciones comunes à Decimales, con las quales se pueden hacer todas las operaciones, y la principal ventaja es, que en ellas las operaciones se hacen de la misma suerte

que

que en los Enteros, ſin amontonar tantas cifras, como es neceſſario en las Fracciones comunes.

108 PROBLEMA I. *Reducir las Fracciones comunes proprias à Fracciones Decimales.*

Como el valór de una Fraccion comun es el miſmo quociente que reſulta, dividiendo el Nùmerador por el Denominador, ſe habrá, para eſta diviſion (que dará por quociente la Fraccion Decimal) de reducir el Numerador à eſpecies inferiores, que ſerá à *decimas, centeſimas, &c.* pero para eſta reduccion ſe habrá de multiplicar el Numerador por 10, ò ſus Potencias: luego para reducir una Fraccion comun propria à Fraccion Decimal:

Regla. *Añadanſe al Numerador tantos ceros, quantos ſe quiera, dividaſe el Numerador, aſſi pueſto, por el Denominador, y el quociente ſerá la Fraccion Decimal equivalente, ò igual à la Fraccion comun propueſta.*

Reduciendo las Fracciones comunes $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ à Decimales, la operacion es como ſe ſigue.

```
4)1.00(0.25    4)3.00(0.75    6)5.00(0.833 &c.
  8              28             48
  --             --             --
  20             20             20
  20             20             18
  --             --             --
   0              0             20
```

Eſto es $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{3}{4} = 0.75$, $\frac{5}{6} = 0.8333$ &c.

Se

Se pone un o en el quociente en lugar de los Enteros, para ſignificar, que no hai Entero alguno, ni unidad, pues de otra ſuerte no ſería Fraccion pura la propueſta; por conſiguiente todas las demás cifras ſon Decimales: algunas veces ſe omite dicho cero de Enteros, por ſuponerſe.

109 Si hechas las diviſiones, no hai reſta alguna, como en el primero, y ſegundo Exemplo, entonces las Fracciones Decimales ſon en todo exactas, y *abſolutamente iguales* à las Fracciones comunes propueſtas. Pero ſi por mas que ſe divida, ſiempre hai alguna reſta, como en el tercer Exemplo, en tales caſos la Fraccion Decimal jamás ſerá *del todo exacta*, ò igual à la Fraccion comun propueſta; pero ſe acercará tanto mas à la exactitud, quanto mas ſe proſiga la diviſion. Para la practica llegando à quatro, ò cinco cifras, no ſe proſigue à mas, por haberſe llegado ya à una exactitud ſuficiente. Como en el tercer Exemplo llegando ſolamente à cinco cifras, ſu diferencia de la exactitud no llega à una *cienmileſima parte de la unidad*; porque la ultima cifra contiene ya todas las cienmileſimas, y aſſi todo lo que ſe ſiguiera, proſiguiendo la diviſion, no llegaria junto à hacer una *cienmileſima*, por eſſo ſe deſprecia.

110 *Si la Fraction, que ſe debe reducir à Decimales, fueſſe impropria, reduzgaſe prime-*

ro à quantidad Mixta de Entero, y Fraccion comun, y la parte fraccional, que será ya Fraccion propria, se podrá reducir por el Problema precedente. Assi $\frac{11}{9} = 1\frac{2}{9} = 1.22222$ &c.

Como los *Pies* son Fracciones de *Varas*, las *Horas* Fracciones de *Dias*, los *Minutos* de *Horas*, las *Monedas*, y *Pesos inferiores de superiores*; y en general qualquier quantidad inferior lo es de una superior, *toda quantidad se podrá exprimir por Fracciones Decimales de aquella, de quien es Fraccion comun.* Assi una Pulgada se reduce à Fraccion Decimal de Pie, considerandola como $\frac{1}{12}$ de Pie, y à Fraccion Decimal de Vara, considerandola como $\frac{1}{36}$; por lo tanto 1 *Pulgada* = 0.08333 &c. de *Pie*, = 0.02777 &c. de *Vara*.

Reducidas ya las quantidades à expressiones Decimales, solo falta el enseñar las Operaciones Arithmeticas con semejantes Fracciones.

111 PROBLEMA II. *Sumar Fracciones Decimales.*

Regla. *Ponganse las partidas como si fuessen numeros Enteros*, esto es, *unidades* (si las hai) *baxo unidades, partes decimas baxo partes decimas, centesimas baxo centesimas, &c. Sumense estas partidas en todo como los Enteros. De la Suma total separense ácia la derecha con un puntico para Decimales tantas cifras, quantas hai de Decimales en la partida en que mas cifras*

cifras Decimales hai, ò lo que es lo mismo *en la Suma las cifras, que estén directamente baxo los Enteros, serán Enteros, las que estén baxo las Decimales, serán Decimales de la misma especie.*

EXEMPLOS.

	2.345	.324	.301
	0.6934	6.002	.4536
	12.52378	15.0423	.032
Sumas	15.56218	21.3683	0.7866

112 PROBLEMA III. *Restar Fracciones Decimales.*

Regla. *Puestas las partidas como en el Sumar, y la menor baxo la mayor, hagase la Resta como en el Restar de Enteros, y las cifras, que en el Residuo, ò Diferencia estén immediatamente baxo las Decimales, serán tambien Decimales de la misma especie.*

EXEMPLOS.

	.356	2.435	24.9032
	.234	1.9234	5.894
Restas	0.122	0.5116	19.0092

Pero adviertase, que entre las partidas Decimales, ò Mixtas no siempre aquella es ma-

yor, en que hai mas cifras, sino aquella, ò bien en que hai mas unidades (si las hai) ò bien si solo hai Decimales, aquella en que la cifra, que exprime las *decimas*, es mayor, ò si faltan estas, aquella que exprime las *centesimas*, *&c.* Asi esta quantidad .39 es mayor, que esta .2945, en la qual las tres ultimas cifras 945 aun no llegan à hacer una *decima*, por lo tanto solo hai *dos* decimas, y algunas partes de una decima, quando en la otra hai *tres* decimas, y nueve centesimas.

113 PROBLEMA IV. *Multiplicar entre sí Fracciones Decimales proprias, ò improprias, ò bien Decimales por Enteros.*

Regla. *Ponganse los Factores, y multipliquense entre sí en todo como si fuessen Enteros, del Producto total separense con un puntico para Decimales tantas figuras, quantos charactéres de Decimales hai en los dos Factores juntos, y las otras serán de Enteros.*

EXEMPLOS.

3.65	0.32
× .33	× 0.54
1095	128
1095	160
1.2045	.1728

Como cada uno de los Factores del primer Exemplo tiene *dos* figuras Decimales, el Producto

ducto habrá de tener *quatro*, y la que queda (1) ferá de Enteros. En el fegundo Exemplo no hai Entero alguno; pero como en los dos Factores hai quatro Decimales, igual numero fe habrán de feparar del Producto.

Para que fe vea la razon de efta operacion, reduzganfe los Factores del primer Exemplo à Fracciones comunes, ferán $3.65 = \frac{365}{100}$, y $.33 = \frac{33}{100}$, el Producto de entrambas $\frac{365}{100} \times \frac{33}{100} = \frac{12045}{10000}$. Efta quantidad es Fraccion impropria, reduzgafe à quantidad Mixta por la actual divifion del Numerador por el Denominador, y el quociente ferá $1\frac{2045}{10000} = 1.2045$.

Porque como para dividir una quantidad por 10, bafta fepararle una figura con un puntico, para dividir por 100, bafta fepararle dos, &c. para dividir por qualefquiera Potencias de 10 (quales fon los Denominadores de las Fracciones Decimales) fe habrán de feparar del Numerador del Producto tantas figuras, quantos ceros habia de haber en el Denominador, ò Divifor; pero en el Denominador del Producto de Decimales hai tantos ceros, quantas figuras de Decimales hai en entrambos Factores juntos: luego en la Multiplicacion de Decimales, encontrado el Producto, como en los Enteros, fe habrán de feparar para Decimales tantas cifras, como figuras de Decimales habia en entrambos Factores juntos.

Por

Por la mifma razon *fi en el Producto no hubieffe baftantes cifras, para feparar en él para Decimales tantas, quantas hai en entrambos Factores juntos, añadanfe al principio del Producto ceros, hafta que iguale.* Affi multiplicando .456 por .213, el Producto da 97128; pero porque en entrambos Factores juntos hai *feis* Decimales, y en el Producto folo hai *cinco* cifras, para poder quitar feis, como fe requiere, añado un cero al principio, y tengo por verdadero Producto .097128 = .456 x .213.

114 PROBLEMA V. *Dividir Fracciones Decimales proprias, ò impropias por otras Decimales proprias, ò impropias.*

Regla. *Hagafe en todo la divifion, como fi fueffen todas las cifras de Enteros, y en el Quociente feparenfe para Decimales tantas, quantas el Dividendo tiene mas que el Divifor.*

Efto es, fi el Dividendo tiene tres figuras de Decimales, y el Divifor una, hecha la divifion feparenfe en el Quociente dos cifras para Decimales, las demás ferán de Enteros.

Hayafe de dividir 10.488 por 2.3. Tomo las partidas como fi en ellas todas las figuras fueffen de Enteros, efto es, divido 10488 por 23, el Quociente me da 456; como en el Dividendo habia tres figuras de Decimales, y en el Divifor folo una, el Quociente habrá de tener dos Decimales, pues

las

las ſepàro con un puntico en el Quociente encontrado, y tengo por verdadero Quociente 4.56.

La razon de eſta operacion es, porque en el Quociente ha de haber tantas Decimales, que juntas con las del Diviſor igualen al numero de Decimales, que hai en el Dividendo, por ſer el Quociente, y el Diviſor los dos Factores, que dan por producto al Dividendo.

Pero ſi en el Dividendo, ò no hubieſſe Decimal alguna (como en el 1º. y 2º. Exemplo de los que ſe ſiguen) ò no hubieſſe à lo menos tantas como en el Diviſor (como en el Exemplo 7º. y 8º.) añadanſele al Dividendo quantos ceros ſe quiera para Decimales, y guardeſe la Regla dada.

Si en Quociente, y Diviſor juntos no hubieſſe tantas Decimales, quantas hai en el Dividendo (como en el 3º. y 4º. Exemplo) añadanſe al *principio* del Quociente tantos ceros para Decimales, quantos ſon meneſter, para que las Decimales del Quociente, y las del Diviſor juntas ſean iguales en numero à las figuras Decimales del Dividendo.

Aſſi dividiendo .360 por 24, el Quociente es 15; pero porque en 15 no hai baſtantes figuras, para que de él ſe quiten tantas para Decimales, quantas ſon meneſter, para que juntas con las del Diviſor igualen al numero

ro de Decimales del Dividendo, añado al principio del 15 un 0, y tengo por verdadero Quociente .015 = $\frac{.360}{24}$.

EXEMPLOS.

.36) 45.00(125.	.063) .4050 (6.428
.02) 31.00(1550.	53.6) 45.89 (0.856
24) .360(0.015	.03) 69.20 (2306.66 &c.
45) .0302 (.0006	.003) 84.70 (28233.3 &c.

115 PROBLEMA VI. *Reducir Fracciones Decimales de especie superior à Enteros, y Decimales de especie inferior.*

Regla. *Multipliquense las Decimales de especie superior por el numero de especies inferiores, que hacen una superior, el producto será los Enteros, y Decimales de la especie inferior, que hacen las Decimales dadas de especie superior.*

Assi tengo .348 *de Libra*, que quiero reducir à *Sueldos*, y *decimales de Sueldos*; pues las multiplico por 20, porque 20 *Sueldos* hacen una *Libra*, y el producto 6.96, será los Sueldos, y decimales de Sueldos, à que equivalen las .348 de Libra. Quiero la misma quantidad reducirla à *Dineros*; pues la multiplico por 240, y su producto 83.52, será los *Dineros*, y *decimales de Dineros*, à que .348 de Libra equivalen.

La razon de esto es, porque assi como multiplicando los Enteros de *Libras* por el numero

to de *Sueldos*, que hace una *Libra*, el producto es el Entero de Sueldos, que hacen las Libras que multiplico: aſſi multiplicando las *decimales de Libra* por el numero de Sueldos, que hace una Libra, el producto ſerá las decimales de Sueldo, que hacen las decimales de Libra.

116 PROBLEMA VII. *Reducir los Enteros, y Decimales de eſpecie inferior, à Enteros, y Decimales de eſpecie ſuperior.*

Regla. *Dividanſe los Enteros, y Decimales de eſpecie inferior por el numero de Enteros de eſpecie inferior, que hacen un Entero de la eſpecie ſuperior, el quociente ſerán los Enteros, y Decimales de la eſpecie ſuperior, à que equivalen los Enteros, y Decimales inferiores dados.*

Tenga 6.96 *Sueldos*, que quiera reducir à *decimales de Libra.* Dividiendo ſegun las Reglas de Diviſion de Decimales la quantidad dada por 20, tengo .348 decimales de *Libra*, à quien equivalen 6.96 decimales de *Sueldo*. Tenga 83.52 de *Dineros*, y las quiera reducir à decimales de *Libra*; dividiendolas por 240, tendré .348 de *Libra*. Eſta Regla es la inverſa de la primera.

117 Quien quiera ver eſta *Arithmetica de Decimales* tratada mui à la larga, y aplicada à varios puntos de Mathematica, y Comercio, lea el *New Compleat, and Univerſal Syſtem, or Body of Decimal Arithmetick by Benjamin Martin*, impreſſo en Londres.

CAPI-

CAPITULO VII.

De las Razones, y Proporciones.

EL Arte de discurrir en todas las Mathematicas es combinar unas quantidades con otras, lo que se hace con la doctrina de las *Razones*, y *Proporciones*, por lo tanto esta es una de las partes mas essenciales de los Elementos.

ARTICULO PRIMERO.

De las Razones, y sus diferentes especies.

118 RAzon de una quantidad à otra es *el modo, con que una quantidad se ha respeto de otra de la misma especie en orden à la magnitud*, esto es, *si le es igual, mayor, ò menor, y quanto?* De ahí se ve, que quando cotejamos una quantidad con otra de su misma especie, podemos buscar dos cosas: la una, precisamente si una quantidad es *mayor que otra? Este modo pues con que la tal quantidad se ha respeto de la otra en orden à su Diferencia, ò Excesso*, se llama *Razon Arithmetica*:

metica: la otra cosa que podemos buscar, es, *quantas veces una quantidad contiene la otra*, ò mas en general, *qual es el quociente de una quantidad dividida por la otra? Y esta relacion de una quantidad à otra en orden à su Quociente se llama Razon Geometrica.*

119 Por lo tanto toda Razon requiere dos terminos; el uno el que se compara, y se llama *Antecedente* de la Razon; el otro es à quien el Antecedente se compara, y se llama el *Consiguiente*. La Razon Arithmetica se conoce qual sea, por el Restar, sacando la quantidad menor de la mayor. La Razon Geometrica se conoce por el Dividir, partiendo el Antecedente por el Consiguiente, y la *diferencia* en la una, y el *quociente* en la otra será el *Exponente*, ò *Denominador* de la Razon, porque *expondrán, y declararán, qual esta Razon sea*. Si se compara la quantidad menor à la mayor, la Razon será *de menor desigualdad*; si se compara la mayor à la menor, será *de mayor desigualdad*; finalmente si las quantidades que se comparan son iguales, la Razon será *de igualdad*.

120 Del modo con que una quantidad contiene la otra, la Razon Geometrica toma diferentes nombres. Se llàma Razon *Multiplice*, quando el antecedente contiene muchas veces al consiguiente; en particular se llama *Dupla*, quando lo contiene dos veces; *Tripla*,

pla, quando lo contiene tres, &c. Al contrario se llama *Submultiplice*, quando el antecedente está contenido algunas veces en el consiguiente; en particular se llama *Subdupla*, quando está contenido dos veces; *Subtripla*, quando tres, &c. Y finalmente *el antecedente de la Razon es tantuplo, ò subtantuplo de su consiguiente, quantuplo, ò subquantuplo es respecto de la unidad, el quociente del antecedente dividido por el consiguiente.* De aquí es, que si este Quociente, ò Exponente es termino racional, la Razon será *Racional*, si es irracional, la Razon será *Irracional*, ò *Incommensurable*.

Algunas veces por no entretenerse en buscar qual sea la Razon de un termino à otro, ò por no tener termino particular, con que exprimirse, se señala otra Razon, à quien es semejante. Por exemplo A es à B, como 6 à 5, es decir, que la Razon de A à B es igual à la Razon, que tiene 6 à 5. La Razon Geometrica se exprime à manera de Fraccion, en que el numerador es el Antecedente, y el denominador el Consiguiente. Assi $\frac{a}{b}$, ò $a : b$, quiere decir la Razon de a à b.

121 Las Razones se pueden comparar unas con otras, esto es, Arithmetica con Arithmetica, Geometrica con Geometrica. Una Razon Arithmetica es *mayor* que otra, *quando el antecedente de la una excede mas à su consi-*

consiguiente (ò es menos excedido de este) que el antecedente de la otra al suyo. Assi 6 à 3 es mayor, que 4 à 3, pues la diferencia de 6 à 3 es 3, y la de 4 à 3 no es sino 1; la de 3 à 4 es mayor, que la de 3 à 6, pues $3 - 4 = -1$, $3 - 6 = -3$, y $-3 < -1$. Una Razon Arithmetica es *menor* que otra, *quando el antecedente excede menos, ò es mas excedido de su consiguiente, que el antecedente de la otra del suyo.*

Una Razon Geometrica es *mayor* que otra, *quando su antecedente contiene mas, ò mas veces à su consiguiente (ò bien está menos contenido en este) que el antecedente de la otra al suyo.* Por lo tanto 12 à 4 es mayor, que 8 à 3, pues 12 contiene à 4 tres veces, y 8 no contiene tantas veces à 3; pero la de 3 à 8 es mayor, que la de 4 à 12, pues $\frac{3}{8} > \frac{1}{3}$. Al contrario una Razon Geometrica es *menor* que otra, *quando el antecedente contiene menos (ò es mas veces contenido) à su consiguiente, que el antecedente de la otra al suyo.* La razon de 4 à 28 es menor, que de 4 à 12, pues 4 es $\frac{1}{7}$ de 28, y $\frac{1}{3}$ de 12.

122 *Quando el antecedente de una Razon contiene (ò es contenido) à su consiguiente igual numero de veces, que el antecedente de otra Razon al suyo, entrambas Razones son iguales.* Esta igualdad, ò desigualdad de Razones se exprime por los signos comunes de Algebra para significar igualdad, ò desigualdad. Por lo

lo tanto $a:b > c:d$, ſignifica, que la Razon de a à b es *mayor*, que la de c à d; al contrario $a:b < c:d$, que es *menor*; finalmente $a:b = c:d$, que es igual. Eſta igualdad de Razones por lo comun ſe exprime aſſi (::)

ARTICULO II.

De las Proporciones en Comun.

123 QUando dos Razones ſon iguales, las quantidades, que las componen, eſtán en *proporcion*, y ſe llaman *Proporcionales*, pues *eſta igualdad de Razones* ſe llama *Proporcion*. Los Antecedentes de entrambas ſe llaman terminos *homologos entre sí*, eſto es, de una miſma denominacion, por ocupar entrambos el lugar de antecedentes, de la miſma ſuerte los Conſiguientes ſon entre sí homologos; y ſegun las Razones, que componen la Proporcion, ſean Arithmeticas, ò Geometricas, ſerá *Arithmetica*, ò *Geometrica* la Proporcion.

124 Como toda Proporcion pide neceſſariamente dos Razones, debe tambien tener dos antecedentes, y dos conſiguientes; pero alguna vez el conſiguiente de una Razon puede ſer antecedente de la otra, y entonces la Proporcion es *continua*. Por ſer en eſta Pro-

porcion

porcion 8 : 4 :: 4 : 2, el 4 antecedente de la primera razon, y consiguiente de la segunda, la Proporcion es *continua*, que para abreviar, siendo Geometrica, se pone assi ∺ 8 : 4 : 2, y ÷ 6 . 4 . 2, si es Arithmetica. El segundo termino 4, que es consiguiente de una Razon, y antecedente de la otra, se llama *Medio proporcional*, ò Arithmetico, ò Geometrico, segun sea la Proporcion; de la misma suerte el tercero (2) *Tercero proporcional*.

125 Pero si cada Razon tiene sus terminos distintos la una de la otra, como en estas 12 : 4 :: 9 : 3, la Proporcion es *discreta*, en la qual el primero, y ultimo termino se llaman *Extremos*, y los otros dos *Medios*. Si una Proporcion *continua* qualquiera prosigue à mas de tres terminos, guardando siempre una misma lei, ò Razon, que es lo mismo, esta Série de terminos formará una *Progression*, *creciente* si los terminos van successivamente aumentando, *decreciente* si van disminuyendo; pues la Progression es una *continuada Proporcion*. Esto es general en toda Proporcion; pero en adelante hablarémos solo de la Proporcion Geometrica, que se entiende con nombre de *Propòrcion*, si no se expressa lo contrario.

126 Como la Proporcion consta de igualdad de Razones, toda la dificultad en este punto consiste en buscar esta igualdad, y dada ella entre

entre algunas quantidades, inferirla aun en caſo que ſe *aumenten*, ò *diſminuyan*, ſe *multipliquen*, ò *dividan*, ò ſe *invierta el orden* de las quantidades, que la componen. Para eſto es meneſter ſuponer los Axiomas, y Definiciones ſiguientes.

AXIOMAS.

1°. *Si dos Razones ſon ſemejantes, ò iguales* (que aquí es lo miſmo) *à una tercera, ſon tambien ſemejantes entre sí.* De donde ſi $a : b :: c : d$, y $e : f :: c : d$, ſerá tambien $a : b :: e : f$.

2°. *Dos quantidades iguales tienen una miſma Razon à otra tercera, y à las iguales à eſta tercera.* Y al contrario *Una quantidad, ò ſus iguales, tiene una miſma Razon à quantidades iguales.* Pues ſi dos quantidades iguales ſe dividen por una miſma tercera, los quocientes, que ſon los Exponentes de la Razon, ſerán los miſmos. De donde ſi $a = b$, ſerá $a : d :: b : d$, aſſimiſmo $d : a :: d : b$.

3°. *Si una quantidad tiene una miſma Razon à dos, ò mas quantidades diferentes, eſtas quantidades ſon entre sí iguales.* Pues en tal caſo la tal quantidad contiene, ò es contenida por las otras de la miſma ſuerte, lo que no puede ſer, ſino ſiendo eſtas otras iguales. Por lo tanto ſi $a : b :: a : c$; luego $b = c$.

DEFI-

DEFINICIONES.

127 1ª. *Proporcion Alternada* es, quando de que quatro quantidades estén en proporcion, esto es, la primera à la segunda, como la tercera à la quarta, se infiere, *que tambien la primera es à la tercera, como la segunda à la quarta.* Este modo de inferir se llama *Alternando*, ò *Permutando.*

2ª. *Proporcion Inversa* es, quando de que quatro quantidades estén en proporcion, se infiere, *que tambien la segunda es à la primera, como la quarta à la tercera.* Este modo de inferir se llama *Invirtiendo.*

3ª. *Composicion de Proporcion* es, quando de que quatro quantidades estén en proporcion, se infiere, *que tambien la Suma de la primera, y de la segunda es à la primera, ò à la segunda, como la Suma de la tercera, y de la quarta es à la tercera, ò à la quarta.* Este modo de inferir se llama *Componiendo.*

4ª. *Division de Proporcion* es, quando de que quatro quantidades estén en proporcion, se infiere, *que tambien el Excesso de la primera sobre la segunda es à la primera, ò à la segunda, como el Excesso de la tercera sobre la quarta es à la tercera, ò à la quarta.* Este modo de inferir se llama *Dividiendo.*

5ª. *Conversion de Proporcion* es, quando de

 que

que quatro quantidades estén en proporcion, se infiere, *que tambien la primera, ò la segunda es al Excesso de la primera sobre la segunda, como la tercera, ò la quarta es al Excesso de la tercera sobre la quarta.* Este modo de inferir se llama *Convirtiendo.*

Todas estas cinco especies de Proporcion toman su nombre del modo de inferirse, y necessariamente se siguen de qualquier Proporcion comun, como verémos, y assi si tenemos una Proporcion, podrémos hacer todas las combinaciones siguientes.

Si	$a : b :: c : d$
Alternando	$a : c :: b : d$
Invirtiendo	$b : a :: d : c$
Componiendo	$a + b : a :: c + d : c$ $a + b : b :: c + d : d$
Dividiendo	$a - b : a :: c - d : c$ $a - b : b :: c - d : d$
Convirtiendo	$a : a - b :: c : c - d$ $b : a - b :: d : c - d.$

ARTI-

ARTICULO III.

Theoremas Fundamentales sobre las Proporciones Geometricas.

128. THEOREMA I. *Las Partes Semejantes son entre sí, como sus Todos respectivos.*

Partes *Semejantes* son las que tienen una misma denominacion respecto de sus Todos, esto es, que cada una es una *tercia*, una *quarta*, una *quinta*, *&c.* de sus respectivos Todos.

Demonst. Las Partes *Semejantes* están contenidas *igual numero de veces* en sus Todos, luego de la misma suerte que un Todo contiene al otro Todo, la Parte Semejante de un Todo contendrá à la Parte Semejante del otro Todo. Assi siendo los Todos A, y B, y las Partes Semejantes *a*, *b*; tendrémos A : B :: *a* : *b*.

129 THEOREMA II. *Si hubiesse quatro quantidades en proporcion* a : b :: c : d, *tambien serán Alternando*, a : c :: b : d.

Demonst. Si los antecedentes *a*, *c* fuessen *menores* que sus consiguientes *b*, *d*, los antecedentes se podrán considerar como *partes semejantes* de sus todos los consiguientes, y si los antecedentes fuessen *mayores*, se podrán considerar como *todos*, y los consiguientes

como ſus partes ſemejantes; pero las partes ſemejantes tienen entre sí la miſma razon, que ſus todos; luego ſi $a : b :: c : d$, ſerán alternando, $a : c :: b : d$.

130 THEOREMA III. *Si dos quantidades ſe multiplican por otra tercera, los Productos tendrán entre sí la miſma razon, que tenian dichas quantidades antes de multiplicarſe.*

Eſto es, ſi a, y b ſe multiplican por una tercera c, ſerá $a : b :: a \times c : b \times c$.

Demonſt. Por las Leyes de la Multiplicacion la unidad eſtá contenida en el Multiplicador, como el Multiplicando en el Producto, y aſſi ſerá

$$1 : c :: a : ac$$
$$1 : c :: b : bc;$$

luego (Axioma 1.) $a : ac :: b : bc$, y alternando, $a : b :: ac : bc$.

131 THEOREMA IV. *Si dos quantidades ſe dividen por otra tercera, las quantidades divididas, ò los Quocientes, tienen entre sí la miſma razon, que tenian antes de dividirſe.*

Eſto es, ſi a, y b ſe dividen por otra tercera c, ſerá $a : b :: \frac{a}{c} : \frac{b}{c}$.

Demonſt. Por las Leyes de la Diviſion el Dividendo contiene el Diviſor, como el Quociente à la unidad; luego $a : c :: \frac{a}{c} : 1$, y $b : c :: \frac{b}{c} : 1$, alternando en entrambas Proporciones

nes tendrémos $a : \frac{a}{c} :: c : 1$, $b : \frac{b}{c} :: c : 1$; luego (Axioma 1.) $a : \frac{a}{c} :: b : \frac{b}{c}$, y alternando, $a : b :: \frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, esto es, los Quocientes como los Dividendos.

132 THEOREMA V. *Si hai quatro quantidades en proporcion, aunque se dividan los consiguientes, ò los antecedentes por una misma quantidad, quedan no obstante dichas quantidades en proporcion.*

Esto es, si $a : b :: c : d$, tambien $a : \frac{b}{e} :: c : \frac{d}{e}$, y $\frac{a}{r} : b :: \frac{c}{r} : d$.

Demonst. 1º. Si $a : b :: c : d$, tambien alternando, $a : c :: b : d$; pero (Theor.4.) $b : d :: \frac{b}{e} : \frac{d}{e}$; luego (Axioma 1.) $a : c :: \frac{b}{e} : \frac{d}{e}$, y alternando, $a : \frac{b}{e} :: c : \frac{d}{e}$.

2º. Si $a : b :: c : d$, alternando, $a : c :: b : d$, pero $\frac{a}{r} : \frac{c}{r} :: a : c$ (Theor. 4.); luego (Axioma 1.) $\frac{a}{r} : \frac{c}{r} :: b : d$, y alternando, $\frac{a}{r} : b :: \frac{c}{r} : d$.

133 THEOREMA VI. *Si quatro quantidades estubiessen en proporcion, quedarán tambien en proporcion, por mas que se multipliquen los antecedentes, ò los consiguientes por una misma quantidad.*

Es-

Esto es, si $a:b::c:d$, tambien $ae:b::ce:d$, y $a:bx::c:dx$.

Demonst. 1º. Si $a:b::c:d$, alternando, $a:c::b:d$; pero (Theor. 3.) $ae:ce::a:c$, luego (Axioma 1.) $ae:ce::b:d$, y alternando, $ae:b::ce:d$.

2º. Si $a:b::c:d$, alternando, $a:c::b:d$; pero $b:d::bx:dx$, luego (Axioma 1.) $a:c::bx:dx$, y alternando, $a:bx::c:dx$.

Cor. Siendo $a:c::ae:ce::bx:dx::\frac{a}{r}:\frac{c}{r}::\frac{b}{e}:\frac{d}{e}$, será $ae:bx::ce:dx$, $\frac{a}{r}:\frac{b}{e}::\frac{c}{r}:\frac{d}{e}$, $ae:\frac{b}{e}::ce:\frac{d}{e}$; y assi *si quatro quantidades están en proporcion, multipliquense, ò dividanse los antecedentes por una quantidad, y los consiguientes por otra, quedarán no obstante, assi multiplicados, como divididos, en proporcion.*

134 Theorema VII. *Si hubiesse quatro quantidades en proporcion* a : b :: c : d, *tambien Invirtiendo*, b : a :: d : c.

Demonst. Si $a:b::c:d$, será $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, luego (Axioma 2.) $1:\frac{a}{b}::1:\frac{c}{d}$; por consiguiente multiplicando los terminos de la primera razon por b, y los de la segunda por d, será (Theor. 3.) $b:a::d:c$.

135 Theorema VIII. *Si hubiesse muchas Razones semejantes, la Suma de todos los antecedentes*

cedentes es à la Suma de todos los consiguientes, como qualquiera de los antecedentes à su respectivo consiguiente.

Esto es, si $a : b :: c : d :: e : f$,

será $a + c + e : b + d + f :: a : b :: c : d :: e : f$.

Demonst. Siendo todas las Razones dadas semejantes, si $a = \frac{1}{2}b$, tambien será $c = \frac{1}{2}d$, $e = \frac{1}{2}f$, luego la suma de todos los antecedentes será la mitad de la suma de todos los consiguientes, y le será en Razon *Subdupla*; pero en tal caso tambien $a : b$ está en Razon *subdupla*, luego dichas Razones son semejantes. Lo mismo sucederá en qualquier Razon esté un antecedente à su consiguiente.

136 THEOREMA IX. *Si hubiesse quatro quantidades en proporcion, la Diferencia de los antecedentes será à la Diferencia de los consiguientes, como el un antecedente à su consiguiente.*

Esto es, si $a : b :: c : d$, será $a - c : b - d :: a : b$.

Demonst. Si $a : b :: c : d$, tambien permutando, $a : c :: b : d$. Demos, que $a > c$, y $b > d$, será c la misma parte de a, que d de b, y $a - c$ la misma parte de a, que $b - d$ de b; pero los todos son como las partes semejantes, luego $a - c : b - d :: a : b$.

137 THEOREMA X. *Si hubiesse quatro quantidades en proporcion, tambien* (Componiendo) *será la Suma del antecedente, y consiguiente de la una Razon à su antecedente, ò à su con-*

consiguiente, como la Suma del antecedente, y consiguiente de la otra Razon à su antecedente, ò à su consiguiente.

Esto es, si $a : b :: c : d$, tambien $a + b : a :: c + d : c$, y $a + b : b :: c + d : d$.

Demonst. Si $a : b :: c : d$, tambien alternando, $a : c :: b : d$; pero (Theor. 8.) $a + b : c + d :: a : c :: b : d$, luego alternando, $a + b : a :: c + d : c$, que es la Suma del antecedente, y consiguiente al antecedente, y $a + b : b :: c + d : d$, que es la misma Suma al consiguiente.

138 THEOREMA XI. *Si hubiesse dos, ò mas Proporciones semejantes, la Suma de todos los antecedentes de las primeras Razones será à la Suma de todos los consiguientes de estas primeras Razones, como la Suma de todos los antecedentes de las segundas Razones à la Suma de todos los consiguientes de las segundas Razones.*

Esto es, si
$$a : b :: c : d$$
$$e : f :: g : h$$
$$n : p :: q : r$$
será $a + e + n : b + f + p :: c + g + q : d + h + r$.

Demonst. Siendo estas Proporciones *Semejantes*, como se supone, serán tambien las Razones, que las componen, semejantes; pero en Razones semejantes la Suma de los antecedentes es à la Suma de los consiguientes, como

como uno de los antecedentes à su consiguiente; luego $a+e+n:b+f+p::a:b$, y $c+g+q:d+h+r::c:d$; pero $a:b::c:d$, luego (Axioma 1.) $a+e+n:b+f+p::c+g+q:d+h+r$.

139 THEOREMA XII. *Si hubiesse quatro quantidades en proporcion, tambien* (Dividiendo) *la Diferencia de los terminos de la primera Razon será à su antecedente, ò consiguiente, como la Diferencia de los terminos de la segunda Razon al suyo, y* (Convirtiendo) *el antecedente, ò consiguiente de la primera Razon será à la Diferencia del antecedente sobre su consiguiente, como el antecedente, ò consiguiente de la segunda Razon à la Diferencia del antecedente sobre su consiguiente.*

Esto es, si $a:b::c:d$, será dividiendo, $a-b:a::c-d:c$, $a-b:b::c-d:d$, y convirtiendo, $a:a-b::c:c-d$, $b:a-b::d:c-d$.

Demonst. Si $a:b::c:d$, será alternando, $a:c::b:d$; pero la diferencia de los antecedentes es à la diferencia de los consiguientes, como el un antecedente à su consiguiente, luego (Theor. 9.) $a-b:c-d::a:c::b:d$, y alternando, $a-b:a::c-d:c$; y $a-b:b::c-d:d$, que es la Proporcion *dividiendo*, è invirtiendo, será $a:a-b::c:c-d$, $b:a-b::d:c-d$, que es la Proporcion *convirtiendo.*

140 THEOREMA XIII. *Si hubiesse dos, ò mas*

mas Proporciones qualesquiera, los Productos de los terminos correspondientes, esto es, *del primero por el primero, del segundo por el segundo, &c. estarán tambien en proporcion.*

Esto es, si $a : b :: c : d$
$e : f :: g : h$

Tambien $ae : bf :: cg : dh.$

Demonst. Por la primera Proporcion, tenemos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y por la segunda $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, luego siendo los factores respectivamente iguales, serán tambien iguales los productos, y tendrémos $\frac{a}{b} \times \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \times \frac{g}{h}$, esto es, $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$, luego (Axioma 2.) (Theor. 3.) $ae : bf :: cg : dh.$

De aquí es, que siendo quatro quantidades proporcionales, tambien lo serán sus Quadrados, sus Cubos, &c. por consiguiente sus Raices semejantes, segundas, terceras, &c. Porque poniendo una Proporcion dos veces, y multiplicando sus terminos, tambien estarán en proporcion los productos, que son sus Potencias.

Esto es, si $a : b :: c : d$
$a : b :: c : d$

Tambien $\begin{cases} a^2 : b^2 :: c^2 : d^2 \\ a^3 : b^3 :: c^3 : d^3 \\ \sqrt[3]{a^3} : \sqrt[3]{b^3} :: \sqrt[3]{c^3} : \sqrt[3]{d^3}. \end{cases}$

Por

Por consiguiente, si hai dos Proporciones, dividiendo los terminos de la una por los terminos respectivos de la otra, estarán los Quocientes en proporcion.

Esto es, si $\begin{cases} a^3 : b^3 :: c^3 : d^3 \\ a^2 : b^2 :: c^2 : d^2 \end{cases}$

Tambien $a : b :: c : d.$

ARTICULO IV.

De la Proporcion de los Extremos por la igualdad de las Razones intermedias.

141 PAra la inteligencia de esto es menester presuponer dos Séries de igual numero de terminos, como *a*, *b*, *c*, *d* en la una, *e*, *f*, *g*, *h* en la otra. El primer termino *a* en la una tiene alguna Razon al segundo *b*, y este (*b*) tambien alguna Razon à *c*, &c. De donde en estas dos Séries de terminos habrá en cada una *tres* Razones, esto es, $a : b$, $b : c$, $c : d$, y en la otra $e : f$, $f : g$, $g : h$. Si las tres Razones de una Série son iguales à las tres Razones de la otra, una à una, precindiendo del orden, que sea la primera à la primera, ò la primera à la segunda; el primer termino de una Série será al ultimo de la misma Série, como el primer termino de la otra, al ultimo de

de la ſuya; eſto es, los quatro extremos eſtarán en proporcion $a : d :: e : h$, y eſta Proporcion ſe inferirá *ex æqualitate Rationum*, de la igualdad de Razones intermedias de una Série con las de la otra.

Si eſtas tres Razones de una Série à mas de ſer iguales à las tres Razones de la otra, ſon *iguales por orden*, eſto es, la primera Razon de la una con la primera de la otra, la ſegunda con la ſegunda, &c. la Proporcion de los extremos ſe inferirá *ex æqualitate ordinata Rationum*, eſto es, *de la igualdad ordenada de Razones*, ò ſi ſe dice por abreviar unicamente *ex æquo*, *por la igualdad*, ſe entiende por la *igualdad ordenada*.

Si eſtas tres Razones de la una Série, aunque ſon iguales con las de la otra, pero no por el orden de primera con primera, ſino la primera de la una con la ſegunda, ò tercera de la otra; la Proporcion de los extremos ſe inferirá de la *igualdad de Razones*, pero no de la igualdad *ordenada*, porque no la hai, ſino de la *igualdad perturbada*, *ex æquo perturbatè*.

Eſto preſupueſto:

142 THEOREMA I. *Si hubieſſe dos Séries de igual numero de Razones iguales, y ordenadas, el primer termino de la una ſerá al ultimo de la miſma Série, como el primer termino de la otra al ultimo de la ſuya*, ex æquo ordinatè, *ò por igualdad de Razones ordenadas.*

Eſto

Esto es, si en estas dos Séries $\left\{\begin{matrix} a:b:c \\ d:e:f \end{matrix}\right\}$ fuesse $a:b::d:e$, y $b:c::e:f$, será $a:c::d:f$.

Demonst. Por ser $a:b::d:e$, será alternando, $a:d::b:e$; de la misma suerte, por ser $b:c::e:f$, será tambien alternando, $b:e::c:f$, luego (Axioma 1.) $a:d::c:f$, y alternando, $a:c::d:f$.

143 THEOREMA II. *Si hubiesse dos Séries de igual numero de Razones iguales, pero no por orden seguido, sino perturbado, tambien por esta igualdad perturbada el primer termino de una Série será al ultimo de la misma Série, como el primer termino de la otra al ultimo de la suya.*

Esto es, si en estas dos Séries $\left\{\begin{matrix} a:b:c \\ d:e:f \end{matrix}\right\}$ fuessen iguales entre sí las Razones $a:b$, y $e:f$, $b:c$, y $d:e$, que es decir la primera Razon de la una con la segunda de la otra, tambien será $a:c::d:f$.

$$\textit{Dem.}\ \text{Por ser} \left\{\begin{matrix} a:b::e:f \\ b:c::d:e \end{matrix}\right\}$$

será (Theor. 13.) $ab:bc::de:fe$

luego (Theor. 4.) $a:c::d:f$.

Y assi si las Razones intermedias de dos Séries son iguales, esté, ò no esté ordenada esta igualdad, siempre los extremos están en proporcion.

Para

144 Para dar fin à esta igualdad de Razones pondré aquí dos Definiciones, que expliquen dos frequentissimos modos de hablar en las Mathematicas; pero primero se ha de notar, que por quantidad *Constante* se entiende una quantidad, *que, se muden, ò no se muden las circunstancias de algun caso, ò las otras quantidades, con quienes se compara, ò junta, siempre queda la misma.* Por quantidad *Variable* se entiende aquella, *que se aumenta, ò disminuye segun las otras se aumentan, ò disminuyen.* Esto presupuesto:

DEFINICION I. *Si hubiesse dos quantidades de tal correlacion entre sí, que no se pueda aumentar la una, sin que la otra se aumente con la misma Proporcion, ni se pueda disminuir en alguna Razon dada, sin que la otra se disminuya en la misma Razon, entonces la una es directamente como la otra*, y se exprimen de esta suerte $a = b$, en donde el signo $=$ no significa igualdad de una quantidad à otra, sino igualdad de Razon con su *aumento*, ò *diminucion* respectiva.

Sean estas dos quantidades a, y b de tal naturaleza, que a no pueda llegar à ser la quantidad c, sin que b llegue à ser la quantidad d, y haya la misma Razon de a à c, que de b à d, entonces a es directamente como b, esto es, con la misma lei con que a aumenta, ò disminuye, aumenta, ò disminuye b, y la misma

ma Razon, que tiene *a* à ſu aumento, ò diminucion, tiene *b* al ſuyo; de donde $a : c :: b : d$, y *a* à *b* eſtá en *Razon directa*.

145 DEFINICION II. *Si hubieſſe dos quantidades variables de tal correlacion entre sí, que no ſe pueda aumentar una en alguna Razon dada, ſin que la otra diſminuya en la miſma Razon; ò al contrario, no ſe pueda diſminuir, ſin que la otra por los miſmos grados ſe aumente, entonces la una es reciprocamente, ò en Razon inverſa de la otra*, y ſe pone aſsi $a = \frac{1}{b}$, ò la Razon de una à ſu aumento es como la Razon de otra à ſu diminucion.

Sea *a* de tal naturaleza, que no ſe pueda aumentar haſta ſer *c*, ſin que *b* diſminuya haſta ſer *d*, y quanto aumente la una, con la miſma Razon diſminuya la otra, en eſte caſo no ſe puede poner eſta Proporcion aſsi $a : c :: b : d$, porque eſto ſignifica Proporcion Directa; pues para reducir la Proporcion Inverſa à Directa ſe ha de tranſtornar una de las Razones, de eſta ſuerte $a : c :: d : b$; y pueſta aſsi eſta Proporcion, ſeguirá las leyes de la Proporcion Directa.

ARTI-

ARTICULO V.

De las Reglas de Proporcion Arithmetica.

146 PAra diſtinguir en las Proporciones la Arithmetica de la Geometrica, en la primera ſeparamos el antecedente del conſiguiente con ſolo un puntico (.), en la ſegunda con dos (:). Solo hablarémos en eſte Articulo, y en el ſiguiente, de la Proporcion, que conſte de dos Razones, eſto es, de *tres terminos*, ſi la Proporcion es *Continua*, y de *quatro*, ſi es *Diſcreta*; porque ſi conſta de mas Razones, ò es Progreſſion, pide otros principios.

147 THEOREMA I. *En toda Proporcion Arithmetica Diſcreta la Suma de los extremos es igual à la Suma de los medios.*

Eſto es, ſi $a . b :: c . d$, $3 . 6 :: 4 . 7$, tambien $a + d = b + c$, $3 + 7 = 6 + 4 = 10$.

Demonſt. Si $a . b :: c . d$, ſerán los Exponentes $a - b = c - d$. Siendo pues eſtas quantidades iguales, ſi ſe añade à entrambas otra quantidad $(b + d)$, quedarán $a + d = b + c$.

COROLLARIO. Como de quantidades iguales quitando partes iguales, las reſtas, ò diferencias ſon iguales, *ſi de la Suma de los extremos quito el un medio, la Diferencia ſerá el otro medio.* Aſſi

Assi en la Proporcion numerica precedente $3 + 7 - 4 = 6$, $3 + 7 - 6 = 4$; y *si de la Suma de los medios quito uno de los extremos, la diferencia será el otro extremo*; pues $6 + 4 - 3 = 7$, $6 + 4 - 7 = 3$.

De aquí es, que dados tres, qualesquiera que sean, de los quatro terminos, que forman la Proporcion Arithmetica, se encuentra el otro, ò bien de la Suma de los extremos quitando el un medio, si se busca el otro; ò bien de la Suma de los medios quitando el un extremo, si se busca el otro extremo.

O bien finalmente formando una Proporcion, poniendo cada termino de los dados en su lugar, y en lugar del termino que se busca, un x que le signifique, despues igualando la Suma de los extremos à la Suma de los medios, y quitando de la tal suma el compañero de x, tendrémos el valor de x, que es el termino buscado. Por exemplo tengo tres terminos de una Proporcion, el primero es 2, el segundo 5, el quarto 6, y busco el *tercero*. Pongo pues $2 . 5 :: x . 6$, $2 + 6 = 5 + x$, $x = 2 + 6 - 5 = 3$, pues el tercer termino, que buscaba, ha de ser 3, y assi será $2 . 5 :: 3 . 6$, y $2 + 6 = 5 + 3$.

148 THEOREMA II. *En qualquiera Proporcion Arithmetica continúa la Suma de los extremos es dupla del medio.*

Esto es, si $\div a . a+x . a+2x$, será $2a+2x = 2(a+x) = 2a+2x$ (*duplo* del segundo $a+x$), $\div 3 . 4 . 5$, será $3+5 = 4 \times 2 = 8$, *duplo* de 4.

Demonst. En la Proporcion Arithmetica continua el segundo termino es igual al primero a + *la diferencia* del primero al segundo x, y assi será $a+x$, el tercero es igual al segundo + la diferencia, y siendo el segundo $a+x$, el tercero será $a+2x$, luego la Suma del primero, y del tercero $a+a+2x$ será el primero dos veces tomado + dos diferencias, esto es, $2a+2x$; pero esta quantidad es dupla del segundo $a+x$, luego si $\div a . a+x . a+2x$, será $2a+2x = 2 \times (a+x)$.

De aquí es, *que para encontrar el Medio Proporcional Arithmetico, dados los extremos, sumense los extremos, y la mitad de esta Suma será el Medio Proporcional.*

Assi en las propuestas Proporciones Arithmeticas, $\frac{3+5}{2} = 4$ será el medio proporcional Arithmetico, $\frac{2a+2x}{2} = a+x$.

Para encontrar el *Tercero Proporcional*, dados los dos primeros, doblo el segundo, y quito de esta suma el primero, la resta será el Tercero Proporcional, $2 \times 4 - 3 = 5$, y si del doble del segundo quito el tercero, la resta será el *Primero*, $2 \times 4 - 5 = 3$.

ARTI-

ARTICULO VI.

De las Reglas de Proporcion Geometrica.

149 THEOREMA I. *En toda Proporcion Geometrica Discreta el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

Esto es, si $a : b :: c : d$, será $ad = bc$, tambien si $2 : 4 :: 8 : 16$, $2 \times 16 = 4 \times 8$.

Demonst. Supuesto que $a : b :: c : d$, tambien $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, multiplicando entrambos quocientes, ò Exponentes por bd, serán iguales los productos, y assi $\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}$; reduciendolo à menor expression (borrando las quantidades comunes) será $ad = cb$.

150 THEOREMA II. *Si quatro quantidades* a, b, c, d *son tales, que el producto de los extremos* (ad) *sea igual al producto de los medios* (bc), *están en proporcion, esto es*, a : b :: c : d.

Demonst. En tal caso $ad = bc$, dividiendo entrambos productos por bd, tendrémos $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, esto es, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, luego (Axioma 2.) (Theor. 3.) $a : b :: c : d$.

De estos dos Theoremas se sigue, *que para averiguar si quatro quantidades están en proporcion, el medio seguro es ver, si el producto de los extremos es igual al producto de los medios*; si lo es, lo están; sino lo es, no lo están.

151 THEOREMA III. *Si quatro quantidades* a, b, c, d (2, 6, 5, 15) *están en proporcion, el producto de los medios dividido por uno de los extremos, dará por quociente el otro extremo, y el producto de los extremos dividido por uno de los medios, dará el otro medio por quociente.*

Esto es, si $a : b :: c : d$, será $\frac{ad}{b} = c$, $\frac{ad}{c} = b$, $\frac{bc}{a} = d$, $\frac{bc}{d} = a$, si $6 : 2 :: 15 : 5$, tambien $\frac{6 \times 5}{2} = 15$, $\frac{6 \times 5}{15} = 2$, $\frac{2 \times 15}{6} = 5$, $\frac{2 \times 15}{5} = 6$.

Demonst. Si $a : b :: c : d$, será $ad = bc$, dividiendo entrambas quantidades por a primer termino, b segundo, c tercero, d quarto, tendrémos $\frac{bc}{a} = d$, $\frac{ad}{b} = c$, $\frac{ad}{c} = b$, $\frac{bc}{d} = a$.

COROLLARIO I. Siendo el producto de los extremos $ad = bc$ producto de los medios, y formandose de sus factores (por los Theoremas antecedentes) las Proporciones $a : b :: c : d$, $a : c :: b : d$, $b : a :: d : c$, $c : a :: d : b$, se sigue (lo que es mui util para todo el discurso de las Mathematicas) *que siempre que encontremos dos productos iguales, se podrá de sus factores for-*

formar una Proporcion Geometrica, tomando por *Primer* termino qualquier factor de un producto, por *Segundo* qualquier factor de el otro, por *Tercero* el otro factor de este segundo, y por *Quarto* saldrá el otro factor del primer producto, pues de esta suerte siempre el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Assi si $ab = cd$, será $c : a :: b : d$, $d : a :: b : c$, &c.

COROLLARIO II. Como qualquier quantidad que sea, se puede considerar como un producto de otras dos, que son sus factores, *siempre que tengamos dos quantidades iguales, reduciendolas à sus factores* (lo que se hace dividiendolas por el un factor, el quociente es el otro) *se formará de ellos una Proporcion.*

Por exemplo $12 = 12$, $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{12}{6} = 2$, $3 \times 4 = 6 \times 2$, luego $2 : 3 :: 4 : 6$.

De este Theorema nace la famosa *Regla de Tres*, en que dados tres terminos, qualesquiera que sean, se encuentra el otro, que con ellos forme una Proporcion. Assi dados los tres primeros, dividiendo el producto del segundo, y tercero por el primero, el quociente es el quarto, dividiendo el mismo producto por el quarto, el quociente es el primero de la Proporcion. Dividiendo el producto del primero, y del quarto por el tercero, el quociente es el segundo, y dividiendo el mismo pro-

producto por el segundo, el quociente es el tercero.

Tambien como en la Proporcion Arithmetica podemos poner x en el lugar del termino que buscamos, haciendo despues el producto de los extremos igual al producto de los medios, y dividiendo el producto de los dos factores dados por el coeficiente de x, tendrémos el valor de x, que es el termino que buscamos. Por exemplo dados *Primer* termino (4), *Segundo* (5), *Quarto* (6), busco el *Tercero*, que forme la Proporcion. Será

$$4:5::x:6,\ 5x=4\times6,\ x=\frac{4\times6}{5}=\frac{24}{5}=4.8;$$

pues el termino que se buscaba es 4.8, y la Proporcion será $4:5::4.8:6$, pues $4\times6=5\times4.8=24$.

152 THEOREMA IV. *En toda Proporcion Geometrica continua el producto de los extremos es igual al Quadrado, ò Segunda Potencia del medio.*

Esto es, si $\div\!\div\ a:b:c$, luego $ac=bb$.

Demonst. Por ser la Proporcion continua, será $a:b::b:c$; pero en toda Proporcion Geometrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios, luego $ac=bb$.

Assimismo si $\div\!\div\ 3:6:12$, será $3\times12=6\times6$.

153 THEOREMA V. *En toda Proporcion Geometrica continua el Quadrado del segundo termino dividido por el primero, da el Tercero*

Pro-

Proporcional, y dividido por el Tercero da el Primero.

Esto es, si $\div a : b : c$, será $\frac{bb}{a} = c$, $\frac{bb}{c} = a$.

Demonst. Sea la Proporcion $\div a : b : c$. Por ser $ac = bb$, dividiendo entrambas quantidades por a primer termino, será $\frac{bb}{a} = \frac{ac}{a} = c$, que es el tercer termino.

Mas $ac = bb$, dividiendo entrambas quantidades por el tercer termino c, será $\frac{bb}{c} = \frac{ac}{c} = a$, que es el primero.

De aquí es, que si dados los dos primeros terminos de una Proporcion continua, busco el *Tercero Proporcional*, no hai mas que multiplicar el segundo por sí mismo, y dividir este Quadrado por el primero, el quociente será el tercero, y si el mismo Quadrado lo divido por el tercero, el quociente será el *Primero*.

154 PROBLEMA. *Dados dos terminos, encontrar un Medio Proporcional.*

Regla. *Multipliquense los dos terminos dados entre sí, y del producto saquese la Raiz quadrada, que será el Medio Proporcional.*

La Raiz quadrada de una quantidad se exprime por la misma quantidad precedida de esta señal $\sqrt{}$. Assi $\sqrt{a}$ es la Raiz *quadrada* de a. De donde dados a, b, su medio proporcional

será

será $\sqrt{ab}$; por lo tanto $\div\!\!\div a : \sqrt{ab} : b$, porque multiplicando los extremos, el producto será igual al medio multiplicado por sí mismo, como verémos.

CAPITULO VIII.

De la Regla de Tres.

155 LA *Regla de Tres*, *Regla de Proporcion*, *Regla de Oro* por su grande utilidad, no es otra cosa, que un *Methodo, por el qual, dados tres terminos de los quatro, que componen la Proporcion, se encuentra el otro*, que con ellos la complete. Pero como estos tres terminos dados pueden ser, ò bien los *dos medios*, y *un extremo* para encontrar el otro *extremo*, ò bien los *dos extremos*, y *un medio* para buscar el otro *medio*, y los tres terminos dados comunmente se ponen por los *tres primeros*, de ahí nace la division de la Regla de Tres en *Directa*, è *Inversa*. *Si se dan dos medios, y un extremo para encontrar el otro extremo, la Regla de Tres es Directa*; *si se dan dos extremos, y un medio, para buscar el otro medio, la Regla de Tres es Inversa.*

156 Mas, ò los terminos que se dan son *sim-*

ſimples, ò *compueſtos*. Si ſon ſimples, eſto es, que ſolo ſe dan tres terminos conocidos, la Regla de Tres es *Simple*; ſi ſon compueſtos, ò lo que es lo miſmo, que ſe forman algunos por la multiplicacion de otros terminos dados (por darſe mas que tres, para encontrar otro) la Regla de Tres es *Compueſta*. Y como eſto puede ſuceder ya en la Regla de Tres Directa, ya en la Inverſa, de aquí es, que abſolutamente hai quatro eſpecies de *Reglas de Tres*, la *Directa Simple*, la *Directa Compueſta*, la *Inverſa Simple*, y la *Inverſa Compueſta*. Todas eſtas ſe llaman *Reglas de Tres*, porque aunque en las Compueſtas ſe den mas terminos que tres, pero finalmente todos han de venir à reducirſe à ſolos tres, como verémos.

Regla de Tres Directa Simple.

157 Entre los tres terminos que ſe dan, los dos forman una razon, por conſiguiente han de ſer de una miſma eſpecie, y los *primeros* de la Proporcion; el otro ha de ſer tal, que como antecedente forme con el termino que ſe buſca, otra razon igual à la primera, y aſſi ha de ſer el termino *tercero*. Por lo qual atendiendo, quales dos de los tres terminos dados forman una razon, à la qual ſe le buſca otra razon ſemejante, y pueſtos por *Primero*,

mero, y *Segundo*, como antecedente, y consiguiente, y el otro por *Tercero*, como antecedente de la segunda razon, se encuentra el *Quarto* termino buscado *multiplicando el segundo por el tercero, y dividiendo el producto por el primero*, como se ve en estos Exemplos.

EXEMPLO I.

30 Varas *de Lienzo cuestan* 50 Libras, 39 Varas *quanto costarán*?

Aquí se ve, que la misma razon que tienen 30 *Varas* à 39 *Varas* ha de tener el *precio* de 30 *Varas*, es à saber, 50 *Libras*, al *precio* de 39 *Varas*, que se busca. Y assi tendrémos la Proporcion $30 : 39 :: 50 : \frac{39 \times 50}{30} = 65$ *Libras*, precio que costarán 39 *Varas*, supuesto que 30 cuesten 50 *Libras*.

158 Pero como para el fin de la multiplicacion de los medios, lo mismo es; que esté el 39 por *segundo*, y 50 por *tercero*, que al contrario, por esso los Arithmeticos no reparan en poner los terminos seguidamente como se van dando; por lo tanto la misma Proporcion se podrá poner assi

$$30^{v.} : 50^{l.} :: 39^{v.} : \frac{50 \times 39}{30} = 65^{l.}$$

EXEM-

EXEMPLO II.

6 Dias *hacen* 8640 Minutos, 9 Dias *quantos* Minutos *harán*?

$$\text{Proporcion } 6 : 8640 :: 9 : \frac{9 \times 8640}{6} = 12960^{Mi.}$$

EXEMPLO III.

60 Peones *hacen* 382.23 Varas *de excavacion*, 300 Peones *quantas harán*?

$$60 : 382.23 :: 300 : \frac{300 \times 382.23}{60} = 1911.15^{v.}$$

159 Como ya los dos primeros terminos, ya el primero, y tercero de una Proporcion (quedando la misma) se pueden dividir por una misma quantidad; si, ò los dos primeros terminos, ò bien el primero, y tercero de una Proporcion dada se dividen por el primero, se reducirá la operacion à sola multiplicacion; pues en tal caso quedará por primer termino la unidad. Assi dividiendo los dos *primeros* terminos de la Proporcion del 2o. Exemplo por el primero (6), se reducirá à ser $1 : 1440 :: 9 : 9 \times 1440 = 12960'$.

Assimismo dividiendo los antecedentes del Exemplo 3o. por 60 (primer termino) será

$$1 : 382.23 :: 5 : 1911.15^{v.}$$

Tambien se puede reducir la Proporcion à sola

ſola multiplicacion dividiendo primero los antecedentes por una comun medida, y deſpues el ſegundo termino, y el quociente del primero, por eſte miſmo quociente.

Aſſi la Proporcion del Exemplo 1º.	30 : 39 :: 50	
ſe reduce:		
Dividiendo los antecedentes por 10	3 : 39 :: 5	: 65 l.
Dividiendo los dos primeros terminos por el quociente (3)	1 : 13 :: 5	

Regla de Tres Directa Compueſta.

160 La *Regla de Tres* ſe llama *Compueſta*, quando ſe dan mas terminos, que tres para encontrar otro que ſe buſca. Para lo qual es meneſter advertir, que entre los terminos que ſe dan hai *Cauſas*, *y Circunſtancias de tiempo, eſpacio*, *&c.* cuyo producto debe conſtituir ſolo *un termino*, y hai *Efectos*, que ſe hacen por tales cauſas pueſtas en tales circunſtancias, como ſe ve en los Exemplos ſiguientes.

EXEMPLO I.

20 Perſonas *en* 15 Dias *gaſtan* 45 Libras, 16 Perſonas *en* 8 Dias *quanto gaſtarán*?

La primera cauſa es 20 *Perſonas*, y la circunſtan-

cunſtancia, que le pertenece, ſon 15 *Dias*; ſu reſpectivo efecto ſon 45 *Libras*, que gaſtan. La otra cauſa es 16 *Perſonas*, y ſu circunſtancia es 8 *Dias*, ſu reſpectivo efecto es la *quantidad que gaſtarán*, que es lo que ſe buſca.

Eſto, que es *haber dos cauſas*, con ſus reſpectivas circunſtancias, y *dos efectos*, ſucede en toda Regla de Tres Compueſta. El *producto* de cada cauſa por ſus reſpectivas circunſtancias conſtituye un termino, cada efecto otro, y aſſi ſe reducirá la Regla de Tres Compueſta à ſolos tres terminos dados; porque en realidad para el caſo, lo miſmo es 20 *Perſonas* en 15 *Dias*, que 15 veces 20 *Perſonas* en un *Dia*, y 16 *Perſonas* en 8 *Dias*, que 8 veces 16 *Perſonas* en un *Dia*.

161 El termino pues que ſe buſca, ò ſerá *todo un efecto*, y entonces ſerá *todo* el 4º· termino, ò bien ſerá la *cauſa*, ò *una de ſus reſpectivas circunſtancias*, y aſſi ſerá *ſolo un factor* del 4º· termino, por lo qual dividiendo todo el quarto termino encontrado por el otro factor dado, el quociente ſerá el termino buſcado. Y aſſi en poner los terminos para la Proporcion vayanſe alternando las cauſas con los efectos.

En el Exemplo propueſto, en que ſe buſca un efecto, eſto es, *el numero de Libras*, que gaſtarán 16 *Perſonas* en 8 *Dias*, ſupueſto que 20 *Perſonas* en 15 *Dias* gaſten 45 *Libras*, ſe encon-

encontrará por la ſiguiente operacion:

1r. *termino*	2o. *termino*	3r. *termino*	4o. *termino*
20 Perſonas × 15 Dias	45 Libras	16 Perſonas × 8 Dias	*numero buſcado de* Libras

Prop. $20 \times 15 : 45 :: 16 \times 8 : \frac{45 \times 16 \times 8}{20 \times 15} = 19.2^{l.}$
que gaſtarán 16 Perſonas en 8 Dias.

Aquí ſe ve, que quando ſe buſca *todo* un efecto, el termino buſcado es el quarto termino entero.

EXEMPLO II.

20 Perſonas *en* 15 Dias *gaſtan* 45 Libras, *quantos* Dias *ſerán meneſter*, *para que* 16 Perſonas *gaſten* 23 Libras?

162 En eſte caſo ſe buſcan los *Dias*, que ſon la circunſtancia de una cauſa.

1r. *termino*	2o. *termino*	3r. *termino*	4o. *termino*
45 Libras	20 Perſonas × 15 Dias	23 Libras	16 Perſonas × *numero buſcado de* Dias

$45 : 20 \times 15 :: 23 : \frac{23 \times 20 \times 15}{45} = 153.333,$

Producto de las 16 *Perſonas* por el *numero buſcado* de *Dias*, que dividido por el factor dado 16 *Perſonas*, da 9.583 *Dias* por el termino buſcado.

Pero ſi dados los *Dias*, ſe buſcaſſe el *numero*

mero de Perſonas, que ſe hubieſſe meneſter para gaſtar las 23 Libras, dividiendo el *quarto* termino 153.333 por el numero dado de *Dias* 9.583, el quociente 16 ſería el numero buſcado de Perſonas.

Ahí ſe ve, que quando ſe buſca alguna cauſa, ò circunſtancia de la cauſa, el quarto termino ſiempre es un producto de la cauſa por ſus circunſtancias; por lo tanto dividido por uno de los factores, ò por el producto de los demás, ſi los factores dados ſon mas de dos, el quociente ſerá la *cauſa*, ò *circunſtancia* buſcada.

163 No ſolo el termino buſcado es *ſolo un factor* del quarto termino, quando ſe buſca alguna cauſa, ò circunſtancia de la cauſa, ſino tambien quando ſe buſca ſolo un *factor* del efecto, por ſer el efecto un producto de algunos terminos, ò quantidades que ſe dan, y de otras que ſe buſcan, como ſe ve en eſte

EXEMPLO III.

60 Hombres, *trabajando à* 8 Horas *por* Dia, *hacen en* 12 Dias *un Foſſo largo de* 21 Varas, 2 Pies, *ancho de* 4 Pies, *y hondo de* 8 Pies, *qual ſerá la Longitud del Foſſo ancho de* 2 Pies, *y hondo de* 5, *que* 50 Hombres *harán en* 15 Dias, *trabajando* 6 Horas *por* Dia?

Si ſe ſaben dicernir las cauſas, y las circunſtan-

cunſtancias de las cauſas, de los efectos, y circunſtancias de los efectos, no tiene mas dificultad eſte caſo, que los demás. El Foſſo es un producto de ſu reſpectivo *largo*, *ancho*, y *profundo*; reduciendolo pues todo à una miſma medida, que es à *Pies* (como ſe hace quando hai diferentes eſpecies de Medidas) ſerá la 1ª. cauſa, y ſus circunſtancias 60 *Hombres*, 8 *Horas*, 12 *Dias*, el primer efecto *un Foſſo largo de* 21 *Varas*, 2 *Pies* (65 *Pies*) *ancho* 4 *Pies*, *hondo* 8 *Pies*; la ſegunda cauſa, y ſus circunſtancias 50 *Hombres*, 15 *Dias*, 6 *Horas*; el ſegundo efecto, el *Foſſo de Longitud buſcada*, *ancho* 2 *Pies*, *hondo* 5 *Pies*, que pueſto todo en forma, ſerá

1r. *termino*	2o. *termino*	3r. *termino*	4o. *termino*
60 Hombres	largo 65 Pies	50 Hombres	*lõgitud buſcada*
× 8 Horas	× ancho 4 Pies	× 6 Horas	× ancho 2 Pies
× 12 Dias	× hondo 8 Pies	× 15 Dias	× hondo 5 Pies

Proporcion en ſus productos

$$5760 \ : \ 2080 \ :: \ 4500 : \frac{936000}{576} = 1625.$$

Dividiendo eſte quarto proporcional por el producto de los factores dados del quarto termino 2 × 5 = 10, da 162.5 Pies *Longitud buſcada* del Foſſo, que reducida à *Varas*, ſerá 54 Varas, y 6 Pulgadas.

Regla

Regla de Tres Inversa Simple.

164 Diximos, que la *Regla de Tres* es *Inversa*, quando de los tres terminos dados *los dos son extremos* de la Proporcion, y se busca un *medio*; pero como comunmente los terminos se ponen seguidamente como se dan, por esso para encontrar el termino buscado *se multiplica el primero por el segundo* (que en realidad es el *quarto* de la Proporcion) *y el producto dividido por el tercero da el termino que se busca*, como se ve en este

EXEMPLO.

30 Hombres *emplean* 40 Dias *en hacer una Obra*, *en quanto tiempo la harán* 10 Hombres?

165 Como quantos menos sean los *Hombres*, tanto mas tiempo habrán menester, los tiempos estarán en *Razon inversa* de la de los *Hombres*; por consiguiente la misma razon tienen 30 *Hombres* à 10 *Hombres*, que el tiempo, que habrán menester los 10 *Hombres* al tiempo (40) que han habido menester los 30. Esto es, 30 : 10 :: *tiempo buscado de* 10 : *tiempo* (40) *dado de los* 30; ò bien tomando los terminos seguidamente como se dan, multiplicando el primer termino por el segundo, y dividiendo este producto por el tercero,

 será

será $\frac{30 \times 40}{10} = 120$ Dias, tiempo que han menester los 10 *Hombres*, supuesto que los 30 hayan menester 40 *Dias*.

Toda la dificultad está en saber dicernir, quando para encontrar el termino que buscamos, nos habrémos de valer de la Regla de Tres Directa, ò de la Inversa. Esto depende de la naturaleza de la cosa, de que se trata, respeto la que se busca. *Si el Sugeto de que tratamos, quanto mayor es da mas, quanto menor da menos*, nos habrémos de servir de la *Regla de Tres Directa. Quando el Sugeto de que se trata, quanto mayor es da menos, quanto menor da mas*, nos habrémos de servir de la *Regla Inversa*.

Regla de Tres Inversa Compuesta.

166 La diferencia que hai entre la Regla de Tres *Inversa Simple*, y la *Inversa Compuesta* consiste, en que en la Inversa Simple los terminos son *simples*, ò no se componen por la multiplicacion de otros terminos dados, y en la Inversa Compuesta algunos terminos son *compuestos*, ò formados por la multiplicacion de otros terminos dados.

Por lo tanto dicerniendo en la Regla de Tres Inversa Compuesta las circunstancias de una causa de las circunstancias de otra, y tal

vez

vez tambien las circunſtancias de los efectos, formando los terminos por la multiplicacion de la cauſa, ò del efecto por ſus reſpectivas circunſtancias, guardenſe las leyes dadas para la Regla de Tres Inverſa Simple, eſto es, que ſi ſe toman los terminos como comunmente ſe dan, multipliqueſe el primero por el ſegundo, y dividaſe el producto por el tercero, el quociente ſerá el termino buſcado, menos en el caſo, que ſolo ſe buſcaſſe uno de los factores del quarto termino, dado el otro; porque en tal caſo el quarto termino ſe habria de dividir por el factor dado, y el quociente ſería el que ſe buſca.

EXEMPLO.

Si 30 Hombres, *trabajando* 8 Horas *por* Dia, *hacen una Obra en* 40 Dias, *en quantos la harán* 10 Hombres, *trabajando à* 6 Horas *por* Dia?

167 Eſto ſe habrá de buſcar por la Regla *Inverſa Compueſta*, pues ſe dan mas terminos que tres, y el tiempo que ſe buſca tanto ſerá mayor, quantos menos *Hombres* ſean; por lo tanto ſe reduce eſte caſo à eſta Proporcion:

Como 30 Hombres, *trabajando à* 8 Horas,
Son à 10 Hombres, *trabajando à* 6 Horas:
Aſſi el tiempo buſcado, *que eſtos* 10 Hombres *han meneſter*
Al que los 30 Hombres *emplean* (40 Dias)

Assi formando los terminos por la multiplicacion de las causas por sus respectivas circunstancias, y tomandolos como se dan, será $\frac{30 \times 8 \times 40}{10 \times 6} = 160$ *Dias*, que los 10 *Hombres* habrán menester para hacer la dicha Obra.

De lo dicho hasta aquí se ve, que quando se haya de usar de la Regla de Tres, el principal cuidado ha de ser en averiguar si pertenece lo que buscamos à la Regla de Tres Directa, ò à la Inversa; y si pertenece à la Regla de Tres Compuesta, en dicernir las circunstancias de una, y otra causa, ò de los efectos, para formar los terminos de la Proporcion.

CAPITULO IX.

De algunas Aplicaciones de la Regla de Tres.

168 La *Regla de Tres*, ò *de Proporcion* aplicada à diferentes materias, tiene diferentes nombres. Aplicada al Interés, que corresponde à algun Capital, se llama *Regla de Interés*; aplicada à la Compañia que hacen dos, ò mas personas en el Comercio, en orden à su Pérdida, ò Ganancia, se llama *Regla de Compañia*; aplicada à la mixtura de varias cosas de diferentes precios, pesos, &c. en

orden

orden à un precio, ò peso medio, se llama *Regla de Alligacion*; aplicada à algunas suposiciones falsas para inferir, ò encontrar lo verdadero, se llama *Regla de Falsa posicion.*

REGLAS DE INTERES.

169 El *Interés*, que es *la Ganancia que corresponde à alguna quantidad por un tiempo dado*, ò es *Simple*, ò *Compuesto*, que tambien se llama *Interés de Interés.* El *Simple* es el que corresponde solo al Capital, el *Compuesto* el que pertenece à la *Suma* del Capital, è Interés ya vencido.

Regla de Interés Simple.

La Regla de *Interés Simple* por un Año, suponiendo à 5 *por ciento*, se reduce à esta Proporcion:

Como 100
A la Rata (5) *del Interés*:
Assi el Capital *dado*
Al Interés, *que le corresponde.*

Si se buscasse el Interés Simple de muchos Años, multipliquese el Interés encontrado de un Año por el *numero de Años*, y el producto será el Interés Simple de todos ellos.

170 Pero para resolver brevemente algunas

nas cosas, que se suelen ofrecer en el Interés Simple, sea

A = à la Quantidad prestada à Interés
R = al Interés, que corresponde al Año à 100l.
T = à los Meses, Semanas, ò Dias del Año
N = à los Meses, &c. por quienes A se presta
S = à la Suma de Capital, è Interés.

Por lo que hemos dicho arriba tendrémos $100 : R :: A : \frac{AR}{100}$ por el Interés, que en *un Año* corresponde à la quantidad A, que se ha prestado. Mas $T : N :: \frac{AR}{100} : \frac{ARN}{100T}$ por el Interés, que la quantidad A da por el *tiempo por el qual se ha prestado*, à quien añadiendo el Capital A, tendrémos $A + \frac{ARN}{100T} = S$, Suma de Capital, è Interés por el tiempo dado; de donde (por las Reglas que darémos sobre las Equaciones) resultan las siguientes Formulas.

$$S = A + \frac{ARN}{100T} \qquad R = \frac{100T \times (S - A)}{AN}$$

$$A = \frac{100ST}{100T + NR} \qquad N = \frac{100T \times (S - A)}{AR}$$

Estas Formulas exprimen el valor de las quatro cosas proporcionales, que se suelen bus-

buscar en el Interés Simple, esto es, la *quantidad* (A) que se presta; *à quanto por ciento* (R); los *Meses, Semanas, ò Dias* (N), por los quales la quantidad se ha prestado; y finalmente la *Suma* (S) *de Capital, è Interés*, que corresponde por el tiempo dado. Dadas *tres* qualesquiera de estas cosas, resulta el valor de la otra, substituyendolas en la Formula, que exprime el valor de la cosa que buscamos, como se verá en los siguientes Problemas.

171 PROBLEMA I. *Encontrar la Suma de Capital, è Interés Simple de* 550 libras *prestadas por* 7 *Meses à* 4 *por ciento al Año.*

Tomando la Formula $S = A + \frac{ARN}{100T}$, que exprime el valor de la cosa que se busca, es à saber, la *Suma de Capital, è Interés* (S) substituyendo las tres cosas dadas en las expressiones universales,

$$\text{será} \begin{cases} A = 550 \\ R = 4 \\ T = 12 \\ N = 7 \end{cases}$$

por consiguiente

$$S = A + \frac{ARN}{100T} = 550 + \frac{550 \times 4 \times 7}{100 \times 12} = 562.833^{l.}$$

Suma de Capital, è Interés que se busca, de quien quitando el Capital 550, resta $12.833^{l.}$ por el Interés limpio.

PRO-

172 PROBLEMA II. *Encontrar qual sea la quantidad, que prestada à Interés Simple à razon de 5 por ciento al Año, ella junto con su Interés en 9 Meses suba à hacer* 600 libras.

Como se busca la *quantidad* que se presta, ò se ha de prestar à Interés, tomese su Formula $A = \frac{100ST}{100T + NR}$, en la qual substituyendo el valor de las tres quantidades dadas, será

$$S = 600,\ T = 12,\ N = 9,\ R = 5,$$

por consiguiente

$$A = \frac{100ST}{100T + NR} = \frac{100 \times 600 \times 12}{100 \times 12 + 9 \times 5} = 578\tfrac{26}{83}\ l.$$

Quantidad, que para el fin que se pretende se ha de prestar à 5 por *ciento.*

173 PROBLEMA III. *Quanto se les ha de cargar de Interés à* 300 libras, *para que en* 15 *Meses, ellas con su Interés formen un fondo de* 330 libras.

Buscando el *Interés* correspondiente à las tres condiciones dadas, tomese su Formula $R = \frac{100T \times (S - A)}{AN}$, en la qual substituyendo las tres cosas dadas, será

$$S = 330,\ N = 15,\ A = 300,\ T = 12,$$

por consiguiente

$$R = \frac{100T \times (S - A)}{AN} = \frac{100 \times 12 \times \overline{330 - 300}}{300 \times 15} = 8.$$

Pues el Interés que se ha de cargar à la quantidad que se presta, es 8 por *ciento.*

PRO-

174 PROBLEMA IV. *En quantos Dias 365 libras à 4 por ciento, harán con su Interés un Fondo, ò Suma de* 400 libras?

Buscando los *Dias* proporcionados, que deben resultar de las condiciones del Problema, tomese su Formula $N = \frac{100T \times (S-A)}{AR}$, en la qual substituyendo los tres valores dados, será

$$S = 400, A = 365, R = 4, T = 365,$$

(reduciendo el tiempo todo à una especie) por consiguiente

$$N = \frac{100T \times (S-A)}{AR} = \frac{100 \times 365 \times (400-365)}{365 \times 4}$$

$= 875$ *Dias*, tiempo que se buscaba.

175 PROBLEMA V. *Encontrar el Interés, que corresponde por Dia à* 1 libra, *contando à 5 por ciento al Año.*

La Formula, ò Expression universal del *Interés* por un tiempo dado, vimos que era $\frac{ARN}{100T}$, en la qual, por las condiciones del Problema, será

$$A = 1, R = 5, N = 1, T = 365,$$

por consiguiente

$$\frac{ARN}{100T} = \frac{1 \times 5 \times 1}{100 \times 365} = \frac{1}{100 \times 73} = 0.00013698^{l.}$$

Interés que corresponde por *Dia* à 1 *libra*, à razon de 5 por *ciento* al Año.

Regla

Regla de Interés Compuesto.

176 El *Interés Compuesto* sucede, quando una Deuda, ò un Capital ha passado muchos Años sin pagarse, ò sin sacarse el Interés Simple que le corresponde, *aumentando de esta suerte el Interés vencido el Fondo, ò el Capital.* Encontrado pues para el primer Año, como arriba, el Interés Simple, que por esse primer Año le corresponde al Capital puesto, para encontrar el Interés, que en el segundo Año le corresponde, tomese por nuevo Capital la *Suma del Capital primero, y del Interés del Año precedente*, y busquese à esta Suma, que Interés le corresponde, y assi de los Años siguientes; pero este methodo es largo, por lo tanto pondrémos otro mas expedito, examinando quanto se va aumentando 1 *l.* con este *Interés Compuesto.*

177 Para saber pues à lo que llega 1 *libra*, con su Interés al fin del *primer Año*, contando à 5 por *ciento*, por exemplo, valiendonos de la dicha Regla, tenemos esta Proporcion:

$$100 : 105 :: 1 : 1.05, \text{ que hago } = R.$$

Al fin del *segundo Año* 1 *l.* vendrá à ser R^2, porque $1 : R :: R : R^2$, al fin del *tercer Año*, será R^3, porque $1 : R :: R^2 : R^3$, al fin del *quarto Año* será R^4, al fin del *quinto* será R^5 &c. finalmente al fin de Años *n* será R^n, *le-*

vantan-

vantando lo que es al fin del primer Año à la Potencia, que indica el numero de Años; luego siendo C el Capital que se pone à *Interés Compuesto*, tendrémos $CR^n = S$, *Suma de Capital, è Interés Compuesto* en *n* Años, de donde salen estas quatro Formulas, que exprimen el valor de las quatro cosas, que en el *Interés Compuesto*, como en el Interés Simple, suelen ocurrir, y à que solo se ha de atender.

$$S = CR^n \qquad R^n = \frac{S}{C}$$

$$C = \frac{S}{R^n} \qquad R = \sqrt[n]{\frac{S}{C}}$$

Mas 1 : R :: 100 : 100 R, que es *quanto llegan à ser* 100 en un Año, por consiguiente este *Excesso* es el *quanto por ciento* por Año corresponde.

178 PROBLEMA. *Qual es el Total, que despues de* 12 *Años resulta de* 15 l. 17 s. 6 d. *puestas à Interés Compuesto de* 6 *por ciento?*

Como se busca el Total S, tomese la Formula $S = CR^n$, que exprime su valor, en la qual por las condiciones del Problema, será $R = 1.06$, $C = 15.875$ *l.* $n = 12$, y por consiguiente $S = CR^n = 15.875 \times (1.06)^{12} = 31$ *l.* 18 *s.* 10.4 *d.*

Estas operaciones por Logarithmos se hacen con grandissima brevedad, por levantarse por su medio con grande expedicion las quantidades à sus Potencias, como verémos.

De

179 De la misma suerte que del Interés Compuesto se puede discurrir de la *Rebaxa* de 5 *por ciento* al Año, por exemplo; examinando lo que rebaxa 1 *l.* en un Año, supuesto que 100 rebaxe 5, para lo qual tenemos esta Proporcion:

$$100 : 95 :: 1 : 0.95, \text{ que hago } = R,$$

al fin del segundo Año será 1 *l.* $= R^2$, al fin del tercero será R^3, finalmente al fin de Años n, será 1 *l.* $= R^n$; con que siendo C el Capital, que se debe rebaxar en n Años, será $CR^n = S$, *Suma* à que viene à parar el Capital al fin de Años n de rebaxa, de donde tendrémos

$$C = \frac{S}{R^n} \qquad R^n = \frac{S}{C}$$

$$S = CR^n \qquad R = \sqrt[n]{\frac{S}{C}}$$

las mismas Formulas, que para el Interés Compuesto; tambien $1 : R :: 100 : 100 \times R$, cuyo *defecto* hasta 100, será el *quanto por ciento* de rebaxa al Año.

REGLAS DE COMPAÑIA.

180 La *Regla de Compañia* sirve, quando se juntan los Capitales de muchos, y despues de algun tiempo se le corresponde à cada uno con la Ganancia, ò Pérdida segun su Fondo, ò Capital. La Regla de Compañia se llama

sin

ſin Tiempo, quando el tiempo por el qual ſe ponen los Capitales es *igual* para todos los particulares: ſe llama *con Tiempo*, quando los tiempos de cada uno ſon *diferentes*; el uno por exemplo pone en la Compañia para 8 Meſes, el otro para 3, &c.

Regla de Compañia ſin Tiempo.

La Regla de Compañia *ſin Tiempo* ſe funda en eſta Proporcion:

Como la Suma *de todos los* Capitales
Es à toda la Ganancia, *ò* Pérdida:
Aſſi el Capital *de cada Particular*
Es à la Ganancia, *ò* Pérdida *particular.*

De ahí ſe ve, que para cada Capital particular ſe habrá de formar nueva Regla de Tres, pero los dos terminos primeros ſiempre ſon los miſmos, y el tercero es el particular Capital.

EXEMPLO.

Quatro Mercaderes A, B, C, D *forman un Fondo de* 421 l. 8 ſ. 6 d. *de manera que*

A	pone	154 l.	13 ſ.	4 d.	= 154.6666 l. &c.
B		110	18	6	= 110.925
C		95	0	8	= 95.0333 &c.
D		60	16	0	= 60.8
Suma		421	8	6	= 421.425

Sea

Sea la Ganancia 88 *l.* 17 *s.* 10 *d.* = 88.8916 &c. *l.*
Tendrémos las ſiguientes Proporciones:

Suma de Capitales.		*Ganancia total.*		*Capital particular.*		*Ganancia.*		
l.		*l.*		*l.*		*l.*		
421.425	:	88.89	::	154.666	:	32.62	de	A
				110.925	:	23.39		B
				95.033	:	20.04		C
				60.8	:	12.82		D

181 Atendiendo à la Proporcion fundamental ſobredicha, podrémos ahorrar tiempo en ſemejantes Compañias, teniendo Formulas generales; para lo que

ſean { A, B, C, D &c. Mercantes en Compañia
a, b, c, d &c. Fondos particulares,

ſerá { $a+b+c+d$ &c. $=$ S, total de los Fondos
G $=$ Ganancia total.

Formando la Proporcion,

tendrémos
$$\frac{Ga}{S} = \textit{Ganancia de } A$$
$$\frac{Gb}{S} = \textit{Ganancia de } B$$
$$\frac{Gc}{S} = \textit{Ganancia de } C$$
$$\frac{Gd}{S} = \textit{Ganancia de } D$$

Pero ſi la razon de S à G ſe reduce à terminos mas breves, dividiendolos por alguna co-

comun medida, ò bien se busca algun termino, que tenga à la unidad la misma razon, que G à S, se podrá abreviar tanto la operacion en semejantes Compañias, que por una leve multiplicacion del Fondo particular por una quantidad constante, ò que en todas partidas será la misma, se encontrará la Ganancia, ò Pérdida, que à cada Particular le pertenece.

Assi, en el Exemplo precedente, siendo 421.425 (S) : 88.8916 (G) :: 1 : 0.21093, substituyendo por la razon S : G su igual, será

	l.		l.		
0.2109 ×	154.666	=	32.6238	Ganancia de	A
	110.925	=	23.3974		B
	95.033	=	20.0453		C
	60.8	=	12.8245		D

Regla de Compañia con Tiempo.

182 La *Regla de Compañia con Tiempo* viene à reducirse à Regla de Tres Compuesta, para cuya inteligencia, pongo un

EXEMPLO.

Tres Mercaderes A, B, C *entran en Compañia*; A *pone* 65.5 l. *para* 8 Meses, 2 Semanas, y 3 Dias; B *pone* 78.66 l. *para* 1 Año, 3 Semanas, y 1 Dia; C *pone* 84 l. *para* 6 Meses, y 6 Dias, *la Ganancia total es* 140.016 l.

Re-

Reduciendo todos los Tiempos à una misma especie, esto es, à *Meses*, y sus decimales, tomese la siguiente

Regla. *Multipliquese el Fondo de cada Particular por su respectivo Tiempo, y despues formese esta Proporcion:*

Como la Suma *de todos estos Productos*
Es à la Ganancia total:
Assi cada particular Producto
A su Ganancia particular *por su Tiempo dado.*

Assi, en el Exemplo propuesto, será

		l.		*Meses.*		*Productos.*
Fondo de	A	65.5	×	8.566	=	561.1123
	B	78.66	×	12.733	=	1001.6013
	C	84.	×	6.2	=	520.8
				Suma de Productos	=	2083.5136
				Total Ganancia	=	140.016 l.

Haciendo pues la Proporcion, tendrémos

Suma de los Productos.	*Ganancia total.*	*Producto particular.*	*Ganancia.*		
l.	*l.*	*l.*	*l.*		
2083.51 :	140.01 ::	561.11 :	37.70	de	A
		1001.60 :	67.30	de	B
		520.8 :	34.99	de	C

Pero si los dos primeros terminos se reduxessen à menor expression, como en la *Compañia sin Tiempo*, la operacion sería mas breve, pues se reduciria à sola multiplicacion.

Obran-

183 Obrando de un modo ſemejante, que en la Compañia ſin Tiempo, para tener Formulas generales,

ſean $\begin{cases} A, B, C, D \text{ \&c. Mercantes en Compañia} \\ a, b, c, d \text{ \&c. Particulares Fondos} \\ m, n, r, s \text{ \&c. Reſpectivos Tiempos,} \end{cases}$

ſerá $\begin{cases} ma + nb + rc + sd \text{ \&c.} = S \left\{ \text{Suma de los Productos de Particulares Fódo, y Tiẽpo} \right. \\ G = \text{Ganancia total,} \end{cases}$

ſiendo $S : G :: 1 : \frac{G}{S}$,

tendrémos $\begin{cases} \frac{G}{S} \times am = \textit{Ganancia de } A \\ \frac{G}{S} \times bn = \textit{Ganancia de } B \\ \frac{G}{S} \times cr = \textit{Ganancia de } C \\ \frac{G}{S} \times ds = \textit{Ganancia de } D \end{cases}$

Y aſſi en Compañias Reales, y Publicas, en las quales ya los Fondos, ya los Tiempos reſpectivos ſon diferentes, ſi en la Reparticion general ſe calcula por las Reglas de Compañia con Tiempo, ſe podrá tomar una Formula de eſtas, en la qual dando à S, G, *a*, *m*, &c. ſu valor particular, ſe encontrará la Ganancia, que à cada uno le pertenece por ſu reſpectivo Fondo, y Tiempo.

REGLAS DE FALSA POSICION.

184 Aunque el uſo, y exercicio de eſta Regla ſea ya raro en las Mathematicas, porque ſu utilidad ſe logra mas facilmente por la Algebra; no obſtante, para que no venga de nuevo, ſi acaſo tal vez ſe encuentra ſu uſo, la pondré aquí. Eſta Regla ſirve, *quando dado un Numero*, ò un *efecto ſe buſca ſu parte determinada*, *ò de determinadas circunſtancias*, *ò la quantidad de la cauſa, que lo produce, valiendonos para encontrarlo de otro numero, ò de otra quantidad*, *que no es la que buſcamos*, y porque nos valemos de *una parte*, *que no es la tal*, *como ſi lo fueſſe* (lo que es falſo) por eſſo ſe llama la Regla de *Falſa Poſicion*, ò *Falſa Supoſicion*. Eſta Regla es *ſimple* ſi ſolo nos ſervimos de una ſupoſicion falſa, ſi de dos, es *doble*.

Regla de Falſa Poſicion Simple.

La Regla de Falſa Poſicion *Simple* ſe funda en eſta Proporcion:

Como el Total *que reſulta del* numero falſo, *que tomamos con las miſmas circunſtancias dadas*
Es al verdadero Total:
Aſſi la Parte falſamente ſupueſta
Es à la Parte verdadera, *que buſcamos*.

La

La practica, y ſubſtancia de eſta Regla ſe ve en el ſiguiente

185 PROBLEMA. *Encontrar una parte de 100 tal, que la ſuma de ſu doble, y de ſu mitad ſea* 100.

Las circunſtancias dadas de la parte que ſe buſca ſon, que la *ſuma de ſu duplo, y de ſu mitad ſea* 100. Tomeſe pues con las miſmas circunſtancias dadas qualquier numero que ſe quiera, inferior à 100, y veaſe qual ſea ſu reſultado. Por exemplo, tomeſe 30 por la parte buſcada, ſu *duplo* ſerá 60, ſu *mitad* 15, la *ſuma de ſu duplo, y de ſu mitad* ſerá $60 + 15 = 75$. De donde ſe ve, que el numero que ſe buſca no es 30; porque el reſultado de 30, tomado con tales circunſtancias, es 75, y el del numero que ſe buſca ha de ſer 100; pero atendiendo que el numero buſcado es la miſma parte de 100, que 30 es de 75, ſiendo los todos como las partes ſemejantes, la miſma razon tendrá el numero falſo (75) al numero dado (100), que la parte falſamente ſupueſta (30) tiene à la parte buſcada. Aſſi ſerá la miſma Proporcion de arriba

$$75 : 100 :: 30 : \frac{30 \times 100}{75} = 40.$$

Pues la parte de 100, que tenga las circunſtancias dadas es 40, y ſe ve, porque

$$2 \times 40 + \frac{40}{2} = 100.$$

Regla de Falſa Poſicion Doble.

186 En la Regla de *Falſa Supoſicion Doble* ſe toman dos numeros, los que queramos, como en la Regla Simple uno, y haciendo con ellos las miſmas operaciones, que en la Regla Simple, ſiendo las tales dos ſupoſiciones falſas, deben por conſiguiente dar dos reſultados, los quales entrambos ſe deben diferenciar del numero, cuya parte buſcamos. Eſtas diferencias, que llamamos *Errores*, ſon *ſemejantes*, quando entrambos reſultados exceden, ò entrambos ſon excedidos por el numero dado; eſtos Errores ſon *deſemejantes*, quando el un reſultado excede, y el otro es excedido por el numero dado. Cada uno de los Errores ſe pone al lado de ſu ſupoſicion con el ſigno + ſi es *en mas*, con el ſigno — ſi es *en menos*.

Eſto preſupueſto, hagaſe eſta Proporcion:

Como la Diferencia de los Errores (ſi ſon ſemejantes) *ò bien, como* ſu Suma (ſi ſon deſemejantes)
Es à la Diferencia de los numeros ſupueſtos:
Aſſi uno *de los* Errores (qualquiera que ſea)
Es à un quarto proporcional,

el qual *añadido* à la reſpectiva ſupoſicion, ſi el Error que ſe ha tomado por *tercer termino* es

es *en menos*, ò *quitado* ſi es *en mas*, ſerá el numero que buſcamos.

187 Buſqueſe, por exemplo, la miſma parte de 100, y con las miſmas circunſtancias, que en la Regla Simple. Suponiendo 30, ſu reſultado es 75, que ſe diferencia de 100 en 25. Suponiendo 38, el reſultado es 95, que ſe diferencia de 100 en 5, y por ſer entrambos Errores *en menos*, ſe ponen con el ſigno —

	Numeros ſupueſtos.	*Errores.*
	30,	— 25
	38,	— 5
Diferencias	8	20

Siendo entrambos Errores *ſemejantes*, tomeſe ſu Diferencia para la Proporcion, que

$$\text{ſerá } 20 : 8 :: 25 : \frac{25 \times 8}{20} = 10$$

El qual quarto proporcional *añadido* al reſpectivo numero ſupueſto 30 del tercer termino de la Proporcion, por ſer Error *en menos*, dará por verdadero numero buſcado $30 + 10 = 40$, como arriba.

Si à mas de ſuponer por una parte 30, cuyo reſultado es 75, ſupuſieſſemos por otra parte 44, con las miſmas circunſtancias, ſu reſultado ſería $2 \times 44 + \frac{44}{2} = 110$, que exce-

de

de à 100 en 10, pues tampoco 44 es el numero que se busca, y por ser 10 Error *en mas* se habrá de poner con el signo +, y assi tendrémos

Numeros supuestos.	*Errores.*	
30,	— 25	
44,	+ 10	
Diferencia 14	35	*Suma*

Por ser Errores *desemejantes*, se habrá de tomar por primer termino de la Proporcion la Suma de los Errores, esto es, 35, y será $35 : 14 :: 10 : \frac{10 \times 14}{35} = 4$

Pero porque el Error, que se ha tomado por tercer termino, es *en mas*, se ha de quitar este quarto proporcional de su respectivo supuesto 44, y assi el verdadero numero buscado será $44 - 4 = 40$, como arriba.

188 Se puede ahorrar tiempo en los casos particulares, teniendo alguna Formula, cuyo valor nos dé el Numero, ò Parte que buscamos, por lo qual sea

A = Numero, ò Quantidad que se busca
B = Primero } Numero Supuesto
C = Segundo }
D = Primero } Error
E = Segundo }

Si

Si entrambos Errores son *semejantes*, ò bien *en mas*, ò bien *en menos*, tendrémos por lo que hemos dicho hasta aquí $\frac{DC - EB}{D - E} = A$, Numero que se busca.

Pero si los Errores son *desemejantes*, uno por *mas*, otro por *menos*, será $\frac{EB + DC}{E + D} = A$, Numero, ò parte que se busca. Substituyendo pues en estas Formulas sus valores respectivos, tendrémos el numero buscado.

REGLAS DE ALLIGACION.

189 Quando se han de mezclar Simples de diferentes especies, el *Methodo de proporcionarlos*, como queramos, es lo que llamamós *Regla de Alligacion*, utilissima para muchos Artifices. Pero porque, ò buscamos la *propriedad Media*, ò del *Mixto* que resulta, dadas las *propriedades*, *y cantidades de los Simples*, ò buscamos las *cantidades*, *y propriedades* de los Simples, *dada la propriedad*, *y cantidad* del Mixto, de ahí nacen dos ramos de la Regla de Alligacion, es à saber, *Alligacion Media*, y *Alligacion Alternada*.

Alligacion Media.

190 Regla de *Alligacion Media* es aquella,

lla, por la qual, dadas las *cantidades* de los *Ingredientes*, y sus *propriedades* de peso, precio, &c. se busca la *propriedad* de peso, precio, &c. de una cantidad del Mixto, y se funda en esta Proporcion:

Como la Suma *de todas las Cantidades* de los Ingredientes
A la Suma *de las propriedades de peso, precio, &c.* de todos ellos:
Assi la Cantidad *particular* del Mixto
A la propriedad *de peso, precio, &c.* de la tal Cantidad.

EXEMPLO I.

Un Platero mezcla 15 Onzas *de Oro, que vale à* 7 l. *la* Onza, *con* 6 *de Plata, que vale à* 1.5 l. *y* 8 *de Cobre, que se vende à* 3 s. = 0.15 l. *quanto valdrá la* Onza *de este Mixto?*

La operacion se prepara de esta suerte:

	Onzas.	*Precios.*		*Productos.*
Oro	15 ×	7. *l.*	=	105
Plata	6 ×	1.5	=	9
Cobre	8 ×	0.15	=	1.2
Suma	29.	*Suma*		115.2 *de precios.*

Proporcion $29 : 115.2 :: 1 : \frac{115.2}{29} = 3\,l.\ 19\,s.\ 5\,d.$ la *Onza* del Mixto. Pues el producto $29 \times 3\,l.\ 19\,s.\ 5.376\,d. = 115.2\,l.$ precio del Mixto.

EXEM-

EXEMPLO II.

Un Artifice mezcla 80 Pulgadas cubicas *de Cobre de* $5\frac{1}{4}$ Onzas *por* Pulgada *con* 20 Pulgadas *de Estaño de* $4\frac{1}{4}$ Onzas *cada una, quanto pesará cada* Pulgada *de este Mixto?*

Operacion:

	Pulgadas.		*Onzas.*		*Productos.*
Cobre	80	×	5.25	=	420
Estaño	20	×	4.25	=	85
Suma	100.		*Suma*		505 *Onzas.*

Proporcion $100 : 505 :: 1 : \frac{505}{100} = 5.05$ *Onzas* cada Pulgada del Mixto.

Pero fundados en la Proporcion fundamental dada para reducir esta Alligacion Media à breves Formulas, sean

A, B, C, D &c. Simples que se deben mezclar.
a, b, c, d &c. Propriedades particulares
$A + B + C + D$ &c. $= S$, Suma de los Simples
$a + b + c + d$ &c. $= R$, Suma de Propriedades

Tendrémos

$$S : R :: \left\{ \begin{array}{l} 1 : \frac{R}{S} \\ 2 : \frac{2R}{S} \\ 3 : \frac{3R}{S} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Propriedad} \\ \text{Media de} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1 \textit{ Parte} \\ 2 \textit{ Partes} \\ 3 \textit{ Partes} \end{array} \right.$$

Alli-

Alligacion Alternada.

191 La Regla de *Alligacion Alternada* (por alternarse los terminos) es un Methodo para encontrar la *cantidad* de los Ingredientes, ò Simples, que se encuentran en el Mixto, dadas la *propriedad Media* de peso, precio, &c. ò del Mixto, y las *propriedades particulares* de los Simples. Acerca lo qual se pueden ofrecer tres casos.

1º. Dadas las *particulares propriedades* de los Ingredientes, y la *Media*, ò del Mixto, encontrar *quanto* de cada uno se requiera para la tal *mixtura*.

2º. Dadas las *particulares propriedades* de los Ingredientes, la *Media*, ò del Mixto, y la *cantidad de uno* de los Simples, encontrar la *cantidad* de los demás.

3º. Dadas las *particulares propriedades* de los Ingredientes, la *Media*, ò del Mixto, y la *Suma total* de las *cantidades* de los Simples, encontrar la *cantidad particular* de cada uno de ellos.

Para estos tres casos daremos tres Reglas, ò tres Problemas, teniendo presente para sus demonstraciones, que este Methodo de la *Alligacion Alternada*, no es otra cosa, que el *inverso* de la *Alligacion Media*.

PRO-

192 PROBLEMA I. *Dadas las particulares Propriedades de los Simples, y la Media, ò del Mixto, encontrar quanto de cada uno se requiera para la tal mixtura.*

Regla. *Tomense las diferencias particulares, por las quales la particular propriedad de cada Simple se diferencia de la Propriedad Media, ò del Mixto, y estas diferencias alternadamente puestas exprimirán las cantidades de los Simples, que para tal mixtura se requieren.*

En las Questiones de esta especie, en que entrassen *dos*, ò *quatro* Simples, de los quales *una mitad* de las propriedades particulares es *mayor*, y otra *mitad* es *menor*, que la propriedad *Media*, dispónganse estas particulares propriedades de suerte, que una *mayor*, y otra *menor* estén *sobre*, otra *menor*, y otra *mayor* estén *baxo* de la *propriedad Media*, como se verá en los Exemplos siguientes.

EXEMPLO I.

Un Artifice ha de mezclar Cobre de 5.25 Onzas *por* Pulgada *con Estaño de* 4.25 *para hacer un Bronce, ò Mixto de* 5.05 Onzas *por* Pulgada, *quanto habrá de mezclar de cada Metal simple?*

La Operacion se arregla assi

Peso Medio. Onzas.	*Pesos particulares.* Onzas.		*Diferencias alternadas.*	Pulg.	
5.05	*Cobre*	5.25	5.05 — 4.25	= 0.8	*Cobre*
	Estaño	4.25	5.25 — 5.05	= 0.2	*Estaño*

Pues

Pues habrá de poner 0.8 Pulgadas de *Cobre* por cada 0.2 Pulgadas de *Estaño*, esto es, 4.2 Onzas *Cobre* por cada 0.85 Onzas *Estaño*.

193 Pero adviertase, que no solo estas cantidades de Simples darán un Mixto de esta especie, sino tambien todas las demás cantidades de los mismos Metales, *que estén en la misma Proporcion*, pues estos Problemas no tanto muestran las cantidades absolutas, que se han de mezclar, como las *Proporciones*, que estas cantidades han de tener entre sí.

Por lo tanto, tendrémos

		Cobre.		*Estaño.*	
Pulg.	Pulg.	Pulg.		Pulg.	
		8	:	2	Todas darán una
0.8 :	0.2 ::	15	:	3.75	misma especie de
		13	:	3.25	*Mixto.*

EXEMPLO II.

Un Artifice quiere mezclar Estaño de 4.25 Onzas *por* Pulgada, *Azogue de* 6.61, *Cobre de* 5.25, *y Antimonio de* 1.98 *para hacer un Mixto de* 4.3 Onzas *por* Pulgada, *quanto habrá de poner de cada Simple de estos?*

Operacion:

Peso Medio.	*Pesos particulares.* Onzas.	*Diferencias alternadas.*	Pulg.	
Onzas.	6.61	4.3 — 4.25	= 0.05	*Azogue*
4.3	4.25	6.61 — 4.3	= 2.31	*Estaño*
	1.98	5.25 — 4.3	= 0.95	*Antimonio*
	5.25	4.3 — 1.98	= 2.32	*Cobre*

Por

Por consiguiente tambien todas las cantidades de estos Simples, que estén en la misma Proporcion; porque

Azogue.	*Estaño.*	*Antimonio.*	*Cobre.*
0.05	2.31	0.95	2.32
			× 3
0.15	6.93	2.85	6.96
			× 4
0.6	27.72	11.4	27.84

los quales productos todos están en una misma proporcion, por consiguiente mezclandose darán Mixto de la misma qualidad.

194 Pero si una de las *particulares Propriedades* dadas de los Ingredientes fuesse $\left\{\begin{matrix}\textit{Mayor}\\ \textit{Menor}\end{matrix}\right\}$, y todas las demás $\left\{\begin{matrix}\textit{Menores}\\ \textit{Mayores}\end{matrix}\right\}$, que la *propriedad Media*, ò del Mixto, las Diferencias (iguales à las *cantidades* de los Simples, que han de entrar en la mixtura) se deben alternar como en los siguientes

EXEMPLOS.

Peso Medio.	*Pesos part.*	*Diferencias alternadas.*	*Peso Medio.*	*Pesos part.*	*Diferencias alternadas.*
	18	2 + 4		14	4
20	22	2	20	18	4
	24	2		24	6 + 2
	2	1+5+13		10	8
4	5	2	40	25	8
	9	2		36	8
	17	2		48	30+15+4

Apli-

Aplicando al *Mayor*, ò *Menor* Peſo particular la *Suma* de todas las otras Diferencias, y à cada uno de los otros la *Diferencia*, por la qual el *Mayor*, ò *Menor* Peſo particular ſe diferencia del Peſo *Medio*. La demonſtracion de eſto es, porque, en el 2°. Exemplo, ſumando tales Diferencias, que ſon la *Suma de las cantidades*, tendrémos 25; multiplicando cada cantidad por ſu reſpectivo Peſo, ſerá la Suma de los Productos, ò de los Peſos = 100, pues por la *Alligacion Media*, tendrémos *Suma de Cantidades* (25) : *Suma de Peſos* (100) :: 1 : $\frac{100}{25}$ (= 4) *Peſo Medio*.

195 PROBLEMA II. *Dadas las particulares Propriedades de los Ingredientes, ò Simples, la Propriedad Media, ò del Mixto, y la cantidad de uno de los Ingredientes, encontrar la cantidad de qualquiera de los demás.*

Eſta ſe llama *Alligacion Alternada Parcial*, por darſe Parte de los Ingredientes.

Pueſtas la *Propriedad Media*, ò del Mixto, las *Propriedades particulares* de cada uno, y las *Diferencias alternadas* como el Problema precedente, la Regla ſe funda en eſta Proporcion:

Como la Diferencia opueſta al Simple, *cuya cantidad ſe da*

Es à la Cantidad *que ſe da*:

Aſſi qualquier otra Diferencia *ya alternada*

Es à la Cantidad, *que correſponde de* ſu Simple.

EXEM-

EXEMPLO.

Se quiere hacer un Mixto de Cobre, que pesa à 5.25 Onzas *por* Pulgada, *Estaño de* 4.25, *Antimonio de* 1.98, *y Azogue de* 6.61. *El Mixto ha de ser de* 4.3 Onzas *por* Pulgada, *se ponen* 8.5 Pulgadas *cubicas de Cobre, quanto se habrá menester de cada Simple de los demás?*

Arreglese la Operacion de esta suerte:

Peso Medio.	*Pesos partic.* Onzas.	*Difer. altern.* Pulg.	
Onzas.	6.61	0.05	*Azogue*
	4.25	2.31	*Estaño*
4.3	1.98	0.95	*Antimonio*
	5.25	2.32	*Cobre*

Proporcion:

		Pulgadas.		
2.32 : 8.5 ::	0.05 :	0.183	de	*Azogue*
	2.31 :	8.463		*Estaño*
	0.95 :	3.480		*Antimonio.*

196 PROBLEMA III. *Dadas las particulares Propriedades de los Simples, la Propriedad Media, ò del Mixto, y la Suma de todas las cantidades de los Simples, que en el Mixto entran, encontrar la cantidad particular de cada Simple, que en él hai.*

Este Methodo se llama *Alligacion Alternada Total.*

Pues-

Pueſtas la Propriedad Media, ò del Mixto, las Propriedades particulares de cada Simple, y las Diferencias alternadas como en los Problemas antecedentes, la Regla ſè funda en eſta Proporcion:

Como la Suma *de todas las Diferencias*
Es al Total *de las Cantidades*:
Aſſi cada particular Diferencia
A la particular Cantidad *del Simple que le correſponde.*

EXEMPLO.

Para hacer un Mixto de 84.25 Pulgadas cubicas, *que peſe* 4.3 Onzas *por* Pulgada, *compueſto de Cobre de* 5.25, *Eſtaño de* 4.25, *Azogue de* 6.61, *y Antimonio de* 1.98 Onzas *por* Pulgada, *quanto ſe habrá meneſter de cada uno de eſtos Simples?*

Arreglеſe la Operacion como en el Problema antecedente:

Peſo Medio.	*Peſos partic.* Onzas.	*Difer. altern.* Pulg.	
Onzas.	6.61	0.05	*Azogue*
4.3	4.25	2.31	*Eſtaño*
	1.98	0.95	*Antimonio*
	5.25	2.32	*Cobre.*
	Suma	5.63	

Pro-

Proporcion :

Suma de Dif.	*Cãtidad total.*	*Difer. partic.*	*Cantidad buscada.* Pulgadas.	
5.63 :	84.25 ::	0.05 :	0.748	de *Azogue*
		2.31 :	34.567	de *Estaño*
		0.95 :	14.216	de *Antimon.*
		2.32 :	34.717	de *Cobre.*

197 Pero es neceſſario advertir acerca la *Alligacion Alternada*, que aunque todas eſtas Combinaciones, ò Proporciones dadas haſta aquí, ò reſpueſtas à los Problemas ſean verdaderas, y exactas, no obſtante ni ſon *todas* las Combinaciones, ò Proporciones, ni todas las reſpueſtas, que dichos Problemas pueden tener, con las quales ſe ſatisfaga à las condiciones dadas. Aſsì en el Exemplo 2°. del primer Problema, es verdad, que la Mixtura de 0.05 de *Azogue*, 2.31 de *Eſtaño*, 0.95 de *Antimonio*, y 2.32 de *Cobre*, y todas las demás cantidades de eſtos Metales, que eſtén en la miſma Proporcion, darán un Mixto de 4.3 *Onzas* por *Pulgada*; pero no ſolo eſtas cantidades de eſtos Metales darán un Mixto de eſte peſo, ſino tambien 2.32 de *Azogue*, 2.31 de *Antimonio*, 0.95 de *Eſtaño*, 0.05 de *Cobre*.

La razon de eſto es, porque la Arithmetica aunque da la Combinacion exacta, pero no da *todas* las exactas, que ſufren los Problemas, y aſsi es fuerza à veces recurrir à la Al-

gebra, por no haber llegado aun la Arithmetica en este punto à su mayor perfeccion. Veanse no obstante las Formulas Generales de los Resultados, à que mas se puede llegar en este punto, que trahe Mr. Benjamin Martin en su *The Young Student's Memorial Book, or Pocket Library*, en donde da un Methodo para encontrar las Soluciones todas, de que son capaces semejantes Problemas de *Alligacion Alternada*.

CAPITULO X.

De la Razon Compuesta, ò de la Composicion de Razones.

ARTICULO PRIMERO.

Explicase la Composicion de Razones.

198 COmo una Razon puede ser *mayor que otra*, puede la Razon aumentarse, y disminuirse, por lo tanto será capaz de *Composicion de Partes*; pero assi como las partes de una linea son lineas, que juntas la *componen*, assi las partes de una *Razon Compuesta* deben ser otras Razones, que juntas la compongan. Quan-

Quando cotejamos dos Razones para averiguar, qual ſea *mayor*, ò *menor*, el medio mas ſeguro *es reducirlas à un miſmo antecedente, ò à un miſmo conſiguiente.* Por exemplo dada la Razon de 7 à 5, y la de 4 à 3, ſe buſca qual ſea mayor? Reduzgaſe la Razon de 7 à 5 à otra que le ſea igual, y tenga por antecedente 4, de eſta ſuerte $7 : 5 :: 4 : \frac{4 \times 5}{7} = 2\frac{6}{7}$, luego la Razon de $7 : 5$, y la de $4 : 2\frac{6}{7}$ ſon las miſmas, ò iguales; cotejando pues ahora la Razon de $4 : 3$ con la de $4 : 2\frac{6}{7}$, facilmente ſe ve, que $4 : 2\frac{6}{7}$ es *mayor* que $4 : 3$, pero $4 : 2\frac{6}{7} = 7 : 5$; luego la Razon de $7 : 5$ es *mayor* que de $4 : 3$.

199 LEMMA I. *Si hai una Série de quantas quiera quantidades* $\left\{\begin{matrix} A, & B, & C, & D \\ 48, & 40, & 30, & 15 \end{matrix}\right\}$, *que vayan ſucceſſivamente ò creciendo, ò diſminuyendo, la Razon, que tienen entre sí los extremos, es Compueſta de todas las Razones intermedias.*

Aſſi la Razon A : D es compueſta de las Razones A : B, B : C, C : D, que forman una Série continua. Demos, que las quatro letras A, B, C, D en vez de ſignificar quantidades, ſignifiquen puntos. No hai duda, que el eſpacio AD ſe compondria de los eſpacios intermedios, y ſe reſolveria en ellos, como en ſus partes. Pues no hai diferencia alguna en-

tre la *Composicion*, y *Resolucion* de Râzones, y la composicion, y resolucion de qualquier otro continuo; de aquí es, *que la Razon de un numero à otro* (como de 6 à 2) *es compuesta de todas las Razones, que tienen entre sí los numeros intermedios, quebrados, y enteros, que se puedan imaginar entre 6, y 2*, por consiguiente *de todas las Razones sus iguales.*

200 LEMMA II. *Assi como una Linea dividida en muchas partes iguales es tantupla de cada parte, quanto es el numero de partes en que se divide, assi una Razon Compuesta de muchas Razones iguales es tantupla de cada una de ellas, quanto es el numero de Razones de que se compone.*

En la Proporcion continua ∺ 9 : 6 : 4, siendo iguales la Razon de 9 : 6, y la de 6 : 4, será la de 9 : 4 *Dupla* de la Razon de 9 : 6, ò bien de la de 6 : 4, y cada una de estas será *Subdupla*, ò la *mitad* de la de 9 : 4; si esta se compusiesse de tres Razones iguales sería *Tripla* de cada una de sus componentes, que sería su *Subtripla*, *&c.* Pero comunmente se dice *Duplicada*, *Triplicada*, *Subduplicada*, *Subtriplicada*, *&c.*

201 De aquí es, que segun el comun modo de hablar hai diferencia entre Razon *Dupla*, ò *Doble*, y Razon *Duplicada*. Razon *Dupla* es una simple Razon, en que el antecedente es *Duplo* de su consiguiente, y mira só-

lo

lo las quantidades, de ſuerte que à no ſer el uſo, mejor ſe diria *Razon de Doble*, que *Razon Doble*; de donde decir, que una quantidad es à otra en *razon Doble*, es decir, que el antecedente es *Duplo* de ſu conſiguiente. Razon *Duplicada* es la compueſta de dos Razones iguales, ò de una dos veces tomada, que es lo miſmo; y una quantidad eſtar à otra en *razon Duplicada* de otra Razon, es decir, que la Razon de una quantidad à otra es igual à la *Razon Compueſta* de otra Razon dos veces tomada, ò de ella, y otra igual.

Como en toda Série de quantidades, que eſtén en proporcion Geometrica continua, las Razones de un termino à ſu immediato ſon iguales entre ſí, y la del primer termino al ultimo es compueſta de todas ellas, por ſer extremos de una Série de Razones continuas, *la Razon del tercer termino al primero, ſerá duplicada de la Razon comun*, eſto es, *del ſegundo al primero, ò del tercero al ſegundo, ò de qualquier termino à ſu immediato*, pues todas eſtas Razones ſon iguales. La Razon del quarto termino al primero ſerá *Triplicada*, &c. porque ſe compondrá de tres Razones iguales. Mas ſiendo qualquier Série de Potencias de una miſma Raiz (a, a^2, a^3, a^4, &c.) una Progreſſion Geometrica, la Razon del tercer termino al primero ſerá tambien duplicada de la Razon comun; y en general *la Razon de qualquier*

quier Potencia à ſu Raiz ſerá tantuplicada de la Razon comun, quanto indica ſu Exponente diſminuido de una unidad.

Aſſi la Razon de $a^4 : a$ ſerá *triplicada* de la de $a^2 : a$, la Razon de $a^n : a$ es $n - 1$ *plicada* de la Razon comun; y *la Razon de qualquier Potencia à 1 es tantuplicada de la Razon comun, como exprime el Exponente de la Potencia.* Por lo tanto la Razon de $a^5 : 1$ es quintuplicada de la de $a : 1$.

ARTICULO II.

Las quatro Operaciones Arithmeticas con las Razones.

202 CÓmo las Razones ſon quantidades, que ſe pueden aumentar, y diſminuir, ſe podrán con ellas hacer las quatro Operaciones comunes de la Arithmetica, eſto es, ſe podrán Sumar para hacer una Suma, que ſea *Razon Compueſta* de dos, ò mas Razones, ſe podrán Reſtar para encontrar la Razon, que ſea *Diferencia de una à otra*, ſe podrán Multiplicar para formar una Razon *Multiplicada de otra*, ò compueſta de otras iguales, finalmente ſe podrán Dividir para ver, quantas veces una Razon contiene la otra, ò quantuplicada ſea una de otra, lo qual,

qual, para penetrar mas à fondo esta doctrina de Razones, enseñarémos en este Articulo.

203 PROBL. I. *Sumar, ò Componer Razones.*

Regla 1ª. *Si las Razones que se deben Sumar, forman una Série de Razones continuas* (esto es, que el consiguiente de una Razon sea antecedente de la otra) *la Suma de estas Razones, ò la Razon Compuesta de todas ellas, será la que tiene el primer termino al ultimo.*

Assi hayanse de Sumar todas estas Razones $a:b$, $b:c$, $c:d$, la Suma de todas ellas será la Razon $a:d$, y a será à d, en la Razon Compuesta de a à b, de b à c, y de c à d. Si todas estas Razones fuessen iguales, será *Multiplicada* de cada una de ellas.

Regla 2ª. *Si las Razones que se deben Sumar fuessen discontinuas* (esto es, que el consiguiente de la una no fuesse antecedente de la otra) *reduzganse à una Série de Razones continuas, que comience por exemplo de* 1, *y la Razon del primer termino al ultimo, será la Razon Compuesta de todas ellas.*

Hayanse de Sumar estas Razones discontinuas $a:b$, $c:d$, $e:f$. Reduciendolas por el siguiente methodo à Razones continuas, serán

$$a:b::1:\frac{b}{a}$$

$$c:d::\frac{b}{a}:\frac{bd}{ac}$$

$$e:f::\frac{bd}{ac}:\frac{bdf}{ace}$$

Es-

Esto es $a : b$, $c : d$, $e : f$ las mismas que $1 : \frac{b}{a}, \frac{b}{a} : \frac{bd}{ac}, \frac{bd}{ac} : \frac{bdf}{ace}$; y siendo esto una Série de Razones continuas, la del primer termino al ultimo será la Suma de todas las intermedias, luego la Suma de las Razones $a : b$, $c : d$, $e : f$ es igual à esta Razon $1 : \frac{bdf}{ace}$; multiplicando pues entrambos terminos por ace, será $ace : bdf$, que es la Razon del *producto de los antecedentes, al producto de los consiguientes* de las Razones dadas; de donde se saca por Regla general: *Para Sumar muchas Razones, ò formar una Compuesta de muchas otras, multipliquense todos los antecedentes entre sí, y multipliquense tambien entre sí todos los consiguientes de las Razones dadas, y la Razon que tengan entre sí estos productos, será la Suma, ò la Razon Compuesta de las que tienen entre sí los factores*; que es lo que comunmente se dice, *la Razon Compuesta de otras Razones es la que tiene el producto de los antecedentes con el producto de los consiguientes.*

204 PROBLEMA II. *Quitar, ò Restar una Razon de otra.*

Regla 1ª. *Si las Razones tubiessen un mismo antecedente, la Diferencia de entrambas sería la Razon, que tienen entre sí los consiguientes,* esto es, *el consiguiente de la Razon, que se ha de*

de quitar, con el consiguiente de aquella de quien se hace la substraccion.

Hayase de quitar la Razon $a:b$ de la de $a:c$. Siendo la Razon $a:c$ compuesta de las Razones $a:b$, $b:c$, quitando la Razon $a:b$, la Diferencia será $b:c$, esto es, la Razon de los consiguientes, y se vé, porque Sumando la Razon $b:c$, que es la Diferencia, con la Razon $a:b$ que se quita, la Suma $a \times b : b \times c$, es la Razon Compuesta $a:c$ ($= a \times b : b \times c$). Esta Regla vale tambien, aunque la Razon que se haya de quitar fuesse de diferente especie, que aquella de quien se quita, esto es, la una de *mayor desigualdad*, y la otra de *menor desigualdad*. Assi quitando la Razon $6:8$ de la Razon $6:3$, la Diferencia será $8:3$, porque Sumando $8:3$ con $6:8$, la Suma es $8 \times 6 : 8 \times 3 = 6:3$, Razon Compuesta de entrambas.

205 Regla 2ª. *Si las Razones entre quienes se ha de hacer la substraccion tubiessen diferentes antecedentes, reduzganse à un mismo antecedente, y el residuo, ò la Diferencia de las Razones será la Razon de los consiguientes.*

Hayase de quitar la Razon $c:d$ de la de $a:b$. Reduzgase la Razon $c:d$ à otra expression que le sea igual, y tenga por antecedente a, de esta suerte $c:d :: a:\frac{ad}{c}$; con que quitar la Razon $c:d$ de la de $a:b$, será lo mismo que

que quitar la Razon $a : \frac{ad}{c}$ de la de $a : b$, que por consiguiente será compuesta de las Razones $a : \frac{ad}{c}, \frac{ad}{c} : b$, con que quitando $a : \frac{ad}{c}$, la Diferencia será la Razon $\frac{ad}{c} : b = ad : bc = \frac{d}{c} \times \frac{a}{b}$. De donde se saca la Regla general: *Para quitar una Razon de otra, inviertase la Razon que se ha de quitar, sumese con aquella de quien se hace la substraccion, y esta Razon Compuesta será la Diferencia de entrambas Razones*, sean estas Razones, que se restan, de una misma, ò diferente especie.

Assi quitando la Razon 8 : 5 de la de 9 : 4, la Diferencia será $9 \times 5 : 4 \times 8$; porque sumando esta Diferencia con la Razon 8 : 5, que se ha quitado, la Suma vuelve à ser la Razon $9 \times 5 \times 8 : 4 \times 8 \times 5$ ($= 9 : 4$); de la misma suerte quitando la Razon 5 : 9 de la de 6 : 4, la Diferencia será $9 \times 6 : 5 \times 4$; la qual sumandola con la Razon 5 : 9, la Suma volverá à ser $9 \times 6 \times 5 : 5 \times 4 \times 9$ ($= 6 : 4$).

206 PROBLEMA III. *Multiplicar Razones.*

Multiplicar una quantidad, es tomar muchas veces dicha quantidad, ò encontrar un Producto, que la contenga tantas veces, quantas el Multiplicador contiene la unidad. Assi tambien Multiplicar una Razon es tomar muchas veces dicha Razon, ò encontrar otra, que

que la contenga tantas veces, como unidades hai en el Multiplicador; de donde Multiplicar la Razon $a : b$ por 2, será *doblarla*, ò *duplicarla*, esto es, *quadrar* los terminos, y el Producto será $a^2 : b^2$; multiplicarla por 3, será triplicarla, ò *cubar* sus terminos $a^3 : b^3$, &c. en general $a^n : b^n$, será *una Razon tantuplicada de la Razon* a : b, *como exprime el Exponente* n; de donde los Quadrados estarán en razon *duplicada*, los Cubos *triplicada*, &c. de sus Raices, por consiguiente las Raices estarán en razon *subduplicada* de los Quadrados, y *subtriplicada* de los Cubos, &c.

Pero adviertase, que aunque toda Razon *Multiplicada* sea Razon *Compuesta*, pero no toda Razon Compuesta es Razon Multiplicada; porque el Multiplicar una Razon no se toma tanto de que se multipliquen entre sí sus terminos homologos, como de que se tome una Razon dos, ò mas veces, y se forme de ella una Razon su multiplice, ò que la contenga muchas veces. Assi si multiplicamos entre sí los terminos homologos de estas dos Razones $5 : 3$, $4 : 3$, la Razon que resulte $5 \times 4 : 3 \times 3$ ($= 20 : 9$) no será Multiplicada de ninguna de ellas; pero será Compuesta de entrambas.

207 PROBLEMA IV. *Dividir Razones.*

La Division es la operacion inversa de la Multiplicacion, pues assi como una Razon se du-

duplica, ò multiplica por 2, quadrando sus terminos, se triplica cubandolos, &c. assi se parte por 2, ò se encuentra su Razon subduplicada, sacando la Raiz Quadrada de sus terminos, se parte por 3, ò se encuentra su Razon subtriplicada, sacando la Raiz Cubica, &c. En general *las Raices están en razon subtantuplicada de las Potencias, quantuplo es el Exponente de las Raices respecto de la unidad.* De donde $\sqrt[5]{a} : \sqrt[5]{b}$ es subquintuplicada de la Razon $a : b$, ò es el Quociente de la Razon $a : b$ dividida por 5.

208 ESCOLIO. Supuesto pues que los Mathematicos dividen las Razones en Razon de *igualdad*, Razon de *desigualdad mayor*, y Razon de *desigualdad menor*, si distinguimos estas Razones segun sus *efectos en orden à la Composicion*, la Razon de mayor desigualdad se podrá considerar como *afirmativa*, ò *positiva*; porque assi como la quantidad afirmativa, ò positiva siempre aumenta la quantidad à quien se añade, assi la Razon de mayor desigualdad siempre aumenta la Razon à quien se junta. Por lo tanto si à la Razon $5 : 3$ añadimos la Razon de mayor desigualdad $3 : 2$, la Suma, ò la Compuesta de entrambas, será la de $5 \times 3 : 3 \times 2 = 15 : 6 = 5 : 2$; pero la Razon $5 : 2$ es mayor que la de $5 : 3$, luego la Razon de mayor desigualdad $3 : 2$ au-

aumenta aquella à quien ſe junta; por lo tanto ſe ha de conſiderar como *afirmativa*, ò *poſitiva*.

Al contrario ſi à la Razon $5:3$ añadimos la de *menor desigualdad* $3:4$, la Suma, ò la Razon Compueſta de entrambas ſerá la de $5 \times 3 : 3 \times 4 = 15 : 12 = 5 : 4$; pero la Razon $5:4$ es menor que la de $5:3$, luego la Razon de *menor desigualdad* diſminuye aquella à quien ſe junta, y aſſi ſe habrá de conſiderar como *negativa*.

Finalmente ſi à la Razon $5:3$ añadimos la de *igualdad* $3:3$, la Suma, ò la Razon Compueſta ſerá $5 \times 3 : 3 \times 3 = 15 : 9 = 5 : 3$, luego la Razon de igualdad ni aumenta, ni diſminuye aquella à quien ſe junta, por lo tanto ſe habrá de conſiderar en orden à la Compoſicion de Razones como 0, que ni aumenta, ni diſminuye la quantidad à quien ſe añade.

De aquí ſe ſigue 1º. *Que la Suma, ò Razon Compueſta de dos, ò mas Razones de mayor desigualdad, ſiempre es mayor que ninguna de ellas*, como ſe ve en las Razones de los terminos de la Série de Potencias a, a^2, a^3, a^4, *&c.* en la qual la Razon de cada termino à 1 ſiempre es mayor que ninguna de las intermedias de que ſe compone.

2º. *Que la Razon Compueſta de dos, ò mas Razones de menor desigualdad, es menor que ninguna de ellas*, como ſe ve en la Razon de 1 à los

los terminos de la Série de Potencias a, a^2, a^3, a^4, &c. en la qual la Razon $1 : a^2$ es compuesta de las de $1 : a$, $a : a^2$, y es menor que ninguna de ellas. Mas como entrambas Razones $1 : a$, $a : a^2$ son iguales, la de $1 : a^2$ es duplicada de cada una de ellas; y es cierto, que no pudiera la Razon $1 : a$ ($= \sqrt{1} : \sqrt{a^2}$) ser *subduplicada* de la de $1 : a^2$, si esta no le fuera *duplicada*; de donde se compone mui bien (y es necessario, que sea en las *Razones de menor desigualdad*) que una Razon sea *subduplicada*, y submultiplicada de otra, y que sea *mayor* que ella, y se ve en la Razon $\sqrt{1} : \sqrt{a^2}$ ($=1 : a$), que es subduplicada de la de $1 : a^2$, y con todo esso es mayor la Razon $\sqrt{1} : \sqrt{a^2}$ ($= 1 : a$), que la de $1 : a^2$, como se ve por sus Exponentes $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$.

3°. *Que la Razon Compuesta de una de mayor, y otra de menor desigualdad, siempre es menor, que sola la Razon de mayor desigualdad componente, y mayor que sola la Razon de menor desigualdad de que se constituye*; pues al mismo tiempo que la de *mayor desigualdad* aumenta la de *desigualdad menor* à quien se junta, esta disminuye à la otra. Assi la Razon Compuesta $5 \times 9 : 8 \times 6$ ($= 5 : 5\frac{1}{3} = 9 : 9\frac{3}{5}$) es *mayor* que la Razon $5 : 8$, y *menor* que la Razon $9 : 6$ de las quales se compone.

Esta distincion de Razones en *Afirmativas*, y

y *Negativas* en orden à la Composicion no es nueva entre los Mathematicos, y se puede ver en Saunderson Professor de Mathematicas en la Universidad de Cambridge *lib.* 7. §. 295.

CAPITULO XI.

De las Potencias, ò Elevacion de las quantidades.

ARTICULO PRIMERO.

De las Potencias de las quantidades Simples.

209 LOS *Productos*, que salen de la Multiplicacion continua de una quantidad por sí misma, y por sus productos, se llaman *Potencias*, ò *Grados* de dicha quantidad, la quantidad se llama *Raíz* de estas Potencias, y el levantar las quantidades à tales Potencias se llama *Elevacion de quantidades.* El producto que sale de la primera multiplicacion se llama el *Quadrado*, ò *Segunda Potencia.* Assi $a \times a = a^2$ es el Quadrado de a. Si este Quadrado a^2 lo multiplicamos otra vez por a, tendrémos $a^2 \times a = a^3$ *Cubo*, ò la *Tercera Potencia* de a. Si el Cubo a^3 lo

a^3 lo multiplicamos otra vez por la Raiz a, tendrémos $a^3 \times a = a^4$ *Quarta Potencia*, y assi al infinito. Advirtiendo, que la Raiz, ò la quantidad misma es su *Primera Potencia*; de donde $a = a^1$.

Las Potencias de quantidades simples se pueden poner con Exponentes

$$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6,$$

ò sin ellos

$$a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa,$$

poniendo la Raiz muchas veces; pero esta diferencia consiste solo en el modo de la Expression.

Estas Potencias, que se forman por continua multiplicacion de la Raiz a, y tienen sus Exponentes positivos, se llaman *Potencias positivas* de a, cuya denominacion viene de su Exponente positivo, y van successivamente creciendo, formando una Série, que es una Progression Geometrica.

210 Pero si assi como hemos multiplicado a muchas veces por sí misma, la dividimos tambien muchas veces por sí misma, tendrémos $\frac{a}{a} = 1$ (de donde se saca, *que qualquier quantidad dividida por sí misma es igual à la unidad*) si dividimos este Quociente por a, tendrémos $\frac{a}{aa} = \frac{1}{a} = \frac{1}{a^1}$; si otra vez, resul-

tará

tará $\frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$; otra vez $\frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3}$; con que *qualquier quantidad entera* (a) *por Multiplicacion forma una Série creciente* a, a^2, a^3, &c. *por Division una Série decreciente* $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$, &c.

Pero como las Potencias de una misma Raiz se dividen entre sí, quitando el Exponente del Divisor del Exponente del Dividendo, para tener el Exponente del Quociente, será $\frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0 = 1$; luego *toda quantidad, que tiene por Exponente* o, *será* = 1. Dividiendo pues a^0 por a, tendrémos $\frac{a^0}{a} = a^{0-1} = a^{-1}$. Dividiendo otra vez por a, tendrémos $\frac{a^{-1}}{a} = a^{-1-1} = a^{-2}$; luego las Potencias de a, que se forman por division

serán $a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}$,

ò bien $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}$,

que solo se diferencian en la expression, y assi $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, *&c.*

211 Pero porque $a^{-2} = a^{0-2} = \frac{a^0}{a^2} = \frac{1}{a^2}$, y $\frac{a^{-2}}{a^{-5}} = a^{-2+5} = a^{-2} \times a^5$, se saca la Regla general: *Toda quantidad, que esté en el Denominador de una Fraccion, se puede poner en el*

Numerador, y la que esté en el Numerador, se puede poner en el Denominador, mudando solo el signo de su Exponente; pues $\frac{a^{-2}}{b} = \frac{b^{-1}}{a^{2}}$, $\frac{b^{2}}{a^{-3}} = \frac{a^{3}}{b^{-2}} = b^{2}a^{3}$.

Y lo que es mas: *Qualquier quantidad, que esté à modo de Entero, se puede poner à modo de Fraccion, cuyo Numerador sea la unidad, y el Denominador la quantidad misma, mudando el signo de su Exponente.* Assi $a^{2} = \frac{1}{a^{-2}}$; porque $a^{2} = 1 \times a^{2} = a^{0+-2} = a^{0} \times a^{2} = \frac{a^{0}}{a^{-2}} = \frac{1}{a^{-2}}$: pues esto solo es mudar la expression, pero no el valor de las quantidades.

Estas Potencias pues de una quantidad, que se forman por la *Division* de la quantidad, y de los Quocientes por sí misma, se llaman *Potencias negativas* de la tal quantidad a, no porque en realidad sean quantidades negativas, pues $a^{-2} = \frac{1}{a^{2}}$, que es una Fraccion positiva, sino porque comunmente se ponen con Exponente negativo, como a^{-2}; pero son Potencias positivas de $\frac{1}{a}$, pues se forman tambien por multiplicacion de $\frac{1}{a}$ por sí misma.

212 En quanto à los *Signos de las Potencias,*

cias, se ve bien, que el *Signo de qualquier Potencia de qualquier quantidad positiva, debe ser positivo* (+); porque siempre en tal caso se multiplica, ò divide + por +, que da en el Producto, ò en el Quociente +; por lo tanto las Potencias de $+a$, serán $+a^2$, $+a^3$, $+a^4$, &c. y en las Potencias negativas de $+a$, aunque los Signos de los Exponentes sean comunmente negativos, no obstante los Signos de las Potencias siempre son positivos, pues $a^{-1} = +a^{-1} = +\frac{1}{a}$.

Quando la quantidad, ò Raiz que se debe levantar à alguna Potencia, es negativa, como $-a$, *los Exponentes, y los Signos de los Exponentes son los mismos, que los de las quantidades positivas*: pero *los Signos de las Potencias van alternando; la Potencia, cuyo Exponente es numero Par, tiene el Signo positivo; si el Exponente es numero Impar, el Signo de la Potencia es negativo.*

Assi las Potencias de $-a$ son $-a$, $+a^2$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, *&c.* en las quales la *Segunda*, y *Quarta* Potencia son $+a^2$, $+a^4$; pues la Segunda Potencia se forma de $-a \times -a$, y la Quarta de $-a^3 \times -a$, y $- \times -$ da en el Producto +, lo mismo en todas otras Potencias de Exponente *Par*; pero la *Tercera*, y *Quinta* Potencia $-a^3$, $-a^5$ tienen signos negativos; pues la Tercera Potencia se forma de la

Segunda, y de la Raiz $+ a^2 x - a$, y la Quinta de la Quarta, y de la Raiz $+ a^4 x - a$, y $+ x -$ da en el Producto $-$.

213 *Quando un termino se eleva à alguna Potencia, deben por consiguiente levantarse à la misma todos sus factores, y coeficientes.* Assi ab levantado à la Segunda Potencia será $a^2 b^2$, y $3ab$ à la Potencia *Tercera*, ò *Cubo* será $3^3 a^3 b^3 = 27 a^3 b^3$: aunque para abreviar se podrá echar una liníta sobre todo el termino, ò incluirlo entre ( ), y poner à la derecha algo mas alto el Exponente de la Potencia; por lo tanto $3^3 a^3 b^3 = \overline{3ab}^3 = (3ab)^3$.

214 *Para elevar à Potencias las Fracciones, se habrán de elevar Numerador, y Denominador*; pues el levantar una quantidad à Potencia es multiplicarla por sí misma, y una Fraccion se multiplica por sí misma, multiplicando por sí mismos Numerador, y Denominador. Assi $\frac{a}{b}$ elevado à Quadrado es $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{3}{4}$ elevado à Cubo es $\frac{27}{64}$.

215 Hasta ahora solo hemos hablado de levantar à Potencias las quantidades, que, ò no tienen Exponentes, ò que solo tienen el que siempre se sobreentiende, no habiendo otro, que es 1; pero las Potencias mismas, ò las quantidades que tienen Exponentes, tambien se pueden multiplicar una, ò muchas

chas veces por sí mismas, y assi podrán ser Raices, que se podrán levantar à Potencias.

Assi $a^3 \times a^3 = a^6$ será el Quadrado de a^3, y la Sexta Potencia de a. Assimismo en quantidades numericas, aunque 4 es el Quadrado de 2; pero 4 se puede multiplicar por sí mismo una, y muchas veces, y assi será Raiz de todos los productos, que de dicha multiplicacion saldrán.

Esto presupuesto:

Para levantar qualquier quantidad *Monoma* (tenga, ò no tenga Exponente distinto de la unidad) à qualquier Potencia:

Regla general. *Multipliquese el Exponente de esta quantidad* (que en tal caso es Raiz) *por el Exponente de la Potencia que se busca, y el producto será el Exponente, que aplicado à la tal quantidad formará la nueva Potencia.*

Assi levantando $a = a^1$ à la Segunda Potencia, será $a^{1 \times 2} = a^2$; levantando a^{-2} à la Segunda Potencia, será $a^{-2 \times 2} = a^{-4}$; levantando $3a^2 b^3$ à Cubo, será $3^{1 \times 3} a^{2 \times 3} b^{3 \times 3} = 27a^6 b^9$; en general a^m elevado à la Potencia que exprime n, será a^{mn}; porque doblando el Exponente de una quantidad se *quadra*, triplicandole se *cuba*, equivaliendo la adicion de los Exponentes à la multiplicacion de las quantidades (num. 73.). Y assi $a^m \times a^m = a^{2m}$, $a^m \times a^m \times a^m$, &c. hasta n terminos, será a^{nm}.

Guar-

Guardese la Regla dada de los signos, pues $-a^2$ levantado à Quadrado será $+a^4$; porque $-a^{2\times 2} = -aa \times -aa = +a^4$, y $-a^n$ levantado à Cubo $= -a^{3n}$.

ARTICULO II.

De las Potencias de las quantidades Compuestas.

216 LAS quantidades Compuestas, ò que constan de muchos terminos, ò bien son *Binomias*, si solo constan de dos, ò bien *Trinomias*, si de tres, &c. Hablarémos solo de la involucion, ò elevacion del Binomio, dando despues una Regla general para los Trinomios, Quadrinomios, &c. Es mui corriente en las Mathematicas indicar solo la operacion para abreviar, assi en breve se levanta qualquier quantidad Compuesta à qualquier Potencia, poniendo la tal quantidad entre ( ), ò bien baxo una linea, que la comprenda toda, poniendo à la derecha el Exponente de la Potencia à que se debe levantar. Assi para levantar la Raiz Compuesta $a+b$ à Quadrado será $(a+b)^2$, à Cubo $(a+b)^3$; assimismo a^2+b^3 à la Potencia quarta será $(a^2+b^3)^4$; pero esto solo es abreviacion mui usada, y muchas veces necessaria.

Las

217 Las Potencias de las quantidades Compueſtas ſe forman à la larga por multiplicacion de la Raiz por sí miſma, y por ſus productos, como ſe ve en eſta Tabla.

$$a + b \text{ Raiz}$$
$$\times\, a + b$$
$$a^2 + ab$$
$$\quad ab + b^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 \text{ Quadrado, ò Potencia } 2^a.$$
$$\times\, a + b$$
$$a^3 + 2a^2b + ab^2$$
$$\quad a^2b + 2ab^2 + b^3$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ Cubo, ò Potencia } 3^a.$$
$$\times\, a + b$$
$$a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$$
$$\quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$$
$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \text{ Potencia } 4^a.$$
$$\times\, a + b$$
$$a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4$$
$$\quad a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$$
$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \text{ Pot. } 5^a.$$
$$\times\, a + b$$
$$a^6 + 5a^5b + 10a^4b^2 + 10a^3b^3 + 5a^2b^4 + ab^5$$
$$\quad a^5b + 5a^4b^2 + 10a^3b^3 + 10a^2b^4 + 5ab^5 + b^6$$
$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
(Pot. 6^a.

Si

218 Si se hubiessen de buscar las Potencias de $a - b$, la operacion se hace de la misma suerte, los terminos serian los mismos con sus Exponentes, y no habria diferencia alguna sino en los signos, que irian alternando de positivo en negativo. *En los terminos en quienes se encontrará la segunda parte del Binomio* (b) *con Exponente impar, el signo del tal termino es* $-$, *y en los que se encontrará* b *con Exponente par, el signo del tal termino es* $+$.

Pues siendo el tal termino el producto de las Potencias de a, que siempre son positivas, y de las Potencias de $-b$, que en los Exponentes pares son positivas, y en los impares negativas, quando los Exponentes de b son pares, entrambos factores del tal termino son positivos, y el producto debe tener el signo $+$; y si los Exponentes de b son impares, entre los factores del tal termino, uno es positivo, que es la Potencia de a, y otro es negativo, que es la Potencia impar de b, por consiguiente el signo del producto debe ser $-$. Assi $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, en donde segundo, y quarto termino, en quienes el Exponente de b es impar, son negativos.

219 Ya se ve, que si siempre que se ha de buscar la 4ª., 5ª., ò qualquier otra de las Potencias superiores de una Raiz Binomia, se hubiessen de buscar poco à poco todas las Potencias intermedias, y por continua multipli-

cacion

cacion llegar à la Potencia que buscamos, la operacion sería larga, y enfadosa; por lo tanto se ha de buscar una Regla, por la qual immediatamente encontremos qualquier Potencia determinada. Para esto examinemos en una de las Potencias sus *Terminos*, sus *Factores*, sus *Exponentes*, sus *Coeficientes*, sus *Signos*, para sacar de ahí una Regla general para todas.

220 Tomemos pues la Potencia 6ª. del Binomio $a+b$, esto es, $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. Encontramos 1º. *Que el numero de terminos de la Potencia excede de una unidad al Exponente de la Potencia*; assi si este es 6, como en el caso presente, el numero de terminos es $6+1=7$; y en general si el Exponente de la Potencia es m, el numero de terminos será $m+1$.

2º. *Que cada termino es un producto de Potencias de entrambas partes de la Raiz*: aunque en el primero (a^6) parezca que no hai Potencia alguna de b; pero como $a^6 = 1 \times a^6$, y $1 = b^0$, será $a^6 = a^6b^0$: lo mismo digo del ultimo (b^6) respecto de las Potencias de a.

3º. *Que las Potencias de la primera parte de la Raiz* (a) *van formando una Série, que comienza de la Potencia de Exponente igual al de la Potencia, à que se eleva el Binomio* (que en este caso es 6) *y que va successivamente disminuyendo*

$= a^0 b^6$, que, como en él ſolo hai la Potencia a^0, ſerá el ultimo termino.

Los Coeficientes correſpondientes, eſto es, el primero del primer termino, &c. ſerán $1, m, m \times \frac{m-1}{2}, m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}, m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}, m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}$, &c. Juntando eſtos Coeficientes à ſus reſpectivos terminos, ſerá $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2}b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3}b^3 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} a^{m-4}b^4$, &c.

Eſto puede ſervir de Formula, ò Theorema general para levantar qualquier Binomio à qualquier Potencia, dando à las quantidades a, b el determinado valor de las partes del Binomio, y à m el del Exponente de la Potencia, à que el Binomio dado ſe quiere levantar. Por exemplo ſi quiero levantar el Binomio à la Potencia 5ª. ſerá $m = 5$, y aſſi poniendo 5 en todos los terminos en lugar de m en la Formula general, tendré el Binomio levantado à la quinta Potencia, &c.

221 No ſolo ſirve eſta Formula general *Newtoniana*, por ſer ſu Autor *Newton*, para levantar un Binomio $(a+b)$ à qualquier Potencia

tencia positiva, que se forma por multiplicacion, sino tambien à qualquier Potencia negativa, ò que se forma por division, es à saber $\frac{1}{(a+b)^1}$, $\frac{1}{(a+b)^2}$, $\frac{1}{(a+b)^3}$, &c. porque estas se pueden reducir à expressiones, cuyas Potencias se formarán por multiplicacion; porque $\frac{1}{(a+b)^3} = (a+b)^{-3}$, luego haciendo en la Formula general $m = -3$, y substituyendo -3 en lugar de m, tendrémos la Potencia $(a+b)^{-3} = \frac{1}{(a+b)^3}$. Y como qualquier Fraccion propria se puede exprimir por este Binomio $1-x$, y toda Fraccion impropria por $x-1$, siendo en el primer caso $x =$ à la diferencia de la tal Fraccion à la unidad (assi si la Fraccion que se levanta à Potencia es $\frac{1}{3}$, será $x = \frac{2}{3}$, pues $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$) y en el segundo $x =$ à la suma de la unidad, y de la Fraccion (por exemplo, si lo que se levanta es $\frac{4}{3}$, será $x = \frac{7}{3}$; porque $x - 1 = \frac{4}{3}$, $x = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$) reduciendo las Fracciones proprias, ò impropriias à estas expressiones *Binomias*, por el methodo precedente se podrán levantar à qualquier Potencia.

Assi levantando $\frac{2}{5}$ à Cubo, por este methodo, tendrémos $\frac{2}{5} = 0.4 = 1 - 0.6$ (por ser $x = 0.6$, y $\frac{2}{5})^3$ $(= \frac{8}{125}) = 0.4^3 = (1 - 0.6)^3 = (1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = 1 - 1.8 +$

1.08

$1.08 - 0.216 = 0.064 = 0.4 \times 0.4 \times 0.4.$

De la miſma ſuerte ſi la quantidad Mixta, ò Fraccion impropria $\frac{4}{3}$ ($= 1\frac{1}{3}$) ſe quiere levantar à Cubo, por eſte methodo, ſerá $x = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$, $x - 1 = \frac{7}{3} - 1$, y $\frac{4}{3})^3 = (\frac{7}{3} - 1)^3 = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 12\frac{19}{27} - 16\frac{1}{3} + 7 - 1 = 2\frac{10}{27} = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{64}{27}$.

Eſte methodo ſobredicho de levantar las Fracciones, ſean proprias, ſean improprias, ò las quantidades Mixtas, reducidas à Fracciones, ſolo es conducente en algun caſo, pues lo comun, y mas expedito es multiplicar las Fracciones por ſí miſmas las veces que ſe requiera.

222 De lo dicho haſta aquí, para levantar los Binomios à qualeſquiera Potencias, ſale la

Regla general. *Para encontrar los terminos de la Potencia, buſqueſe primero la Série de las Potencias de la primera parte del Binomio, comenzando de la Potencia cuyo Exponente ſea igual al Exponente de la Potencia buſcada del Binomio, haſta la que tenga por Exponente* 0. *Buſqueſe tambien la Série de las Potencias de la ſegunda parte, deſde el Exponente* 0 *haſta la de el Exponente igual al de la Potencia que ſe buſca del Binomio. Pueſtas la una baxo la otra, multipliquenſe los terminos reſpectivos entre sí, y los productos ſerán los terminos de la Potencia del* Binomio. *Para encontrar los Coeficientes de cada termino, multipliqueſe el Coeficiente del termi-*

termino antecedente por el Exponente de la Potencia de la primera parte del Binomio, que en él ſe encuentre, y dividiendo eſte producto por el numero que indica el orden del tal termino, el Quociente ſerá el Coeficiente del termino que ſe ſigue. Juntenſe los Coeficientes à ſus reſpectivos terminos, y la ſuma total ſerá la Potencia que ſe buſca. Por poca practica que ſe tenga, ſe hace eſta operacion toda de una vez.

223 Para levantar un *Trinomio*, un *Quadrinomio*, *&c.* à qualquier Potencia, ſe ha de reducir antes à una expreſſion binomia, *ſubſtituyendo en lugar de todos los terminos, excepto el primero, una quantidad, que tendrá el lugar de la ſegunda parte del Binomio.* Levantando eſte Binomio à la Potencia que ſe buſca, deſpues en lugar de la quantidad que he ſubſtituido, y ſus Potencias, poniendo los otros terminos, y ſus Potencias, tendré la Potencia del Trinomio, del Quadrinomio, &c.

Por exemplo hayaſe de levantar el Trinomio $a + b + c$ à la quarta Potencia, ſubſtituyo en lugar de $b + c$ eſta otra quantidad d, y ſerá $a + b + c = a + d$; levanto eſte Binomio à la quarta Potencia, y tengo $(a + d)^4 = a^4 + 4a^3d + 6a^2d^2 + 4ad^3 + d^4$. Pues en lugar de d en el ſegundo termino, pongo ſu principal, y ſerá eſte ſegundo termino $4a^3 (b + c) = 4a^3b + 4a^3c$. En el tercero en lugar de d^2 pongo $(b + c)^2$ *&c.* aſſi en los demás terminos.

CA-

CAPITULO XII.

De la Extraccion de Raices de quantidades Algebraicas.

ARTICULO PRIMERO.

De la Extraccion de Raices de quantidades Algebraicas Simples.

224 ASsi como para la *elevacion* multiplicamos una quantidad muchas veces por sí misma, y por sus productos, formando por estas multiplicaciones las *Potencias* de la tal quantidad; assi retrocediendo por los mismos passos, dada la Potencia, por la division, que es el regresso de la multiplicacion, llegarémos à la quantidad, de cuya multiplicacion se habia formado, ò se podria formar la Potencia dada (à menos que su Raiz no sea Imaginaria, ò Incommensurable) y el encontrar esta quantidad, de cuyas multiplicaciones por sí misma, y por sus productos, la quantidad, ò Potencia dada se formaria, es lo que llamamos *sacar la Raiz de una quantidad, ò reduccion de la Potencia à su Raiz*, que es lo mismo. Para

225 Para explicar esta extraccion de Raices, pongamos una Série de Potencias formadas todas de una misma Raiz; por exemplo a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, *&c.* Todas estas Potencias se forman por multiplicacion de la Raiz a, de donde a es Raiz de todas ellas, pero es *diferente* Raiz de cada una. Respecto del Quadrado a^2 es Raiz segunda, ò *quadrada*, respecto del Cubo a^3 es Raiz *cubica*, *&c.* en general el Exponente de la Potencia, expone al mismo tiempo, *que calidad de Raiz le sea la quantidad sin el tal Exponente.* Assi el Exponente m expone, que a es la Raiz m de la Potencia a^m; pero adviertase, que aunque una quantidad sea determinada Potencia respecto de otra, que le es su proporcionada Raiz, puede no obstante ser otra especie de Potencia respecto de otra Raiz: como se ve en a^4, que es *quarta* Potencia de a, pero *segunda* de a^2. Por lo tanto qualquier quantidad será qualquier genero de Potencias respecto de diferentes otras, como puede ser qualquier genero de Raiz, y assi de qualquier quantidad se podrá sacar qualquier genero de Raices.

226 La *extraccion de Raices* muchas veces en el Calculo se hace por abreviacion, poniendo antes de la quantidad, de quien se ha de sacar la Raiz, esta señal $\sqrt{}$, que significa *Raiz de*, encima la qual se pone una cifra, ò numero, que indica la calidad de Raiz que es; por lo

tanto le es su Exponente. Assi $\sqrt[3]{a}$ significa la Raiz cubica de esta quantidad a, $\sqrt[4]{a}$ la Raiz quarta, en general $\sqrt[m]{a}$ la Raiz, que exprime la letra m.

Si la quantidad, de quien se ha de sacar la Raiz, es Compuesta, se pone la tal quantidad entre parenthesis, ò bien con una linita encima, poniendo antes el signo Radical con su Exponente; assi la Raiz quarta de $a + b$ será $\sqrt[4]{(a+b)}$ ò $\sqrt[4]{\overline{a+b}}$.

Si el signo Radical no tubiesse particular Exponente, se sobreentiende 2, y entonces la Raiz es quadrada. Assi $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.

227 Algunas veces es del todo necessario recurrir à esta expression $\sqrt{}$, porque ni por abreviacion, ni à la larga podemos exprimir la Raiz de una quantidad de otra suerte. Por exemplo la Raiz quadrada de $-a$ no se puede exprimir de otra suerte que de esta $\sqrt{-a}$, como verémos: Tampoco se puede exprimir de otra suerte exactamente la Raiz quadrada de 7, que assi $\sqrt{7}$, porque no hai numero alguno, ni quebrado, ni entero, que la pueda exprimir *exactamente*, esto es, que multiplicado por sí mismo dé por producto 7; porque, ò habia de ser 2, ò habia de ser 3, ò alguna Fraccion entre 2, y 3, como $2\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{4}$, &c.

Pero

Pero no es 2, porque $2 \times 2 = 4$; no es 3, porque $3 \times 3 = 9$; no es 2, y una Fraccion, porque ninguna Fraccion, ò quantidad fraccional multiplicada una, ò muchas veces por sí misma da por producto un Entero, si ella no lo es, como se ve probando en quantas Fracciones se quiera: luego no pudiendose exprimir exactamente por Quebrados, ni Enteros, es fuerza recurrir al signo Radical. Y semejantes Raices se llaman *Surdas*, ò *Irracionales*, por ser quantidad, que no tiene Razon racional con la unidad.

228 Para sacar pues qualquier Raiz de qualquier quantidad Simple, ò Monoma Algebraica tomese esta Regla general. *Qualquier Raiz de qualquier quantidad Simple se saca dividiendo el Exponente de la quantidad por el Exponente de la Raiz.* Assi $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$, y en general $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[s]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{ns}}$. En las quantidades Numericas tambien alguna vez se hace la mismа operacion. Assi $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{9^4} = 9^{\frac{4}{3}}$.

Esta Regla no tiene excepcion en quantidad alguna possible, pero si en las Raices *impossibles*, ò *imaginarias*, porque no es lo mismo $\sqrt{-a^2}$, que $-a^{\frac{2}{2}}$, pues $-a^{\frac{2}{2}} = -a$, que es

quantidad posible, pero negativa, y $\sqrt{-a^2}$ es quantidad imposible; por lo tanto las Raices imposibles lo mejor es que se queden con el signo $\surd$. Respecto pues de las posibles solo necesita la Regla dada de aplicacion à varios casos.

Si la quantidad no tubiesse Exponente, se le sobreentiende 1, el qual dividido por el Exponente de la Raiz, será el Exponente de la quantidad Radical; de donde $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$.

229 De esta Regla se sigue 1°. *Que si el Exponente de la Raiz, que se ha de sacar, es el mismo, ò igual al Exponente de la quantidad, basta para sacar la Raiz, borrarle à la quantidad su Exponente.* Assi $\sqrt[m]{a^m} = a$, porque $\sqrt[m]{a^m} = a^{\frac{m}{m}=1} = a$.

2°. *Si la quantidad tubiesse factores, para sacar su Raiz se ha de dividir el Exponente de cada factor por el Exponente de la Raiz*; de donde $\sqrt[3]{bd} = b^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[n]{b^m d a^r} = b^{\frac{m}{n}} d^{\frac{1}{n}} a^{\frac{r}{n}}$.

3°. *Si la quantidad fuesse fraccional, se ha de dividir el Exponente del Numerador, y del Denominador por el Exponente de la Raiz*; assi

$$\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^2}} = \frac{a^2}{b^{\frac{2}{3}}}, \sqrt[n]{\frac{a}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{3^{\frac{1}{n}}} = 3^{-\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[5]{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a^{0.4}}{c^{0.8}}.$$

Como

230 Como las quantidades Compueſtas, ò Polinomias para abreviar ſe levantan à Potencias, incluyendolas entre ( ), y al ultimo el Exponente de la Potencia, dexando intactos ſus Exponentes proprios (como a^7+b^5 levantado à la Potencia n es $(a^7+b^5)^n$) conſiderandolas de eſta ſuerte en cierta manera como quantidades Simples, tambien para ſacar la Raiz valdrá en ellas la Regla ſuperior de dividir el Exponente de la tal Potencia por el Exponente de la Raiz, dexando intacto quanto haya entre los parentheſis. Aſsi $\sqrt[n]{(a^7+b^5)^m}=(a^7+b^5)^{\frac{m}{n}}$. Y por quanto $a^7+b^5=(a^7+b^5)^1$, ſerá $\sqrt[n]{a^7+b^5}=(a^7+b^5)^{\frac{1}{n}}$.

231 El principio de quanto hemos dicho ſe funda en que una quantidad ſe levanta à Potencias, multiplicando ſu Exponente por el Exponente de la Potencia que ſe buſca: luego dada la Potencia, dividiendo ſu Exponente por el Exponente de la Raiz, ſe deshará lo que ſe habia hecho, y quedará la Raiz. Para levantar a^1 à Quadrado, multiplico el Exponente de a^1 por 2, y tengo $a^{1\times 2}=a^2$: luego ſi eſta Potencia la quiero reducir à ſu Raiz como eſtaba, deshago lo hecho dividiendo el Exponente por 2, y tendré $a^{\frac{2}{2}}=a$.

Quan-

232 *Quando el Exponente de la Raiz, que se busca, es un Divisor exacto del Exponente de la quantidad, la Raiz será una Potencia inferior de la quantidad misma.* Assi $\sqrt[4]{a^{16}} = a^{\frac{16}{4}} = a^4$, que es una Potencia perfecta de *a*. Pero si el Exponente de la Raiz no fuesse Divisor exacto del de la dicha quantidad, la quantidad que fuesse Raiz, tendrá por Exponente una Fraccion, ò quantidad fraccional propria. Asi porque 2 no es Divisor exacto de 5, ni de 7, será $\sqrt{a^5} = a^{\frac{5}{2}}$, $\sqrt{a^7} = a^{\frac{7}{2}}$; pero ni esta, ni $a^{\frac{5}{2}}$ son Potencias perfectas de *a*, pues jamás se podrá multiplicar por sí misma, ni por sus productos, de suerte que llegue à ser $a^{\frac{5}{2}}$, $a^{\frac{7}{2}}$.

Se llaman no obstante Potencias *Imperfectas*, ò *Surdas* de *a*, y se hacen las operaciones con ellas de la misma suerte, que con las Potencias perfectas. Se Multiplican entre sí sumando los Exponentes, se Dividen quitando el Exponente del Divisor del Exponente del Dividendo, se levantan à Potencias multiplicando sus Exponentes por el Exponente de las Potencias, y se sacan sus Raices dividiendo sus Exponentes por los de las Raices.

233 En orden à los Signos *positivo*, ò *negativo*, que deben tener las Raices, se puede inferir de lo que hemos dicho en la Elevacion de las quantidades, es à saber, *que toda*

Po-

Potencia de Signo positivo puede tener las Raices cuyo Exponente es par, ò positivas, ò negativas. Pues assi $+a \times +a$, como $-a \times -a = a^2$; de donde $\sqrt{a^2}$ puede ser $+a$, y $-a$: luego la Raiz quadrada, biquadrada, sexta, octava, &c. de una quantidad positiva, puede ser, ò *positiva*, ò *negativa.*

Al contrario, *si la quantidad es negativa, ninguna Raiz de Exponente par será positiva, ni negativa*; porque no hai quantidad alguna, ni positiva, ni negativa, que multiplicada por sí misma un numero *par* de veces dé un producto negativo, pues ni $-a$, ni $+a$ multiplicado por sí mismo da $-a^2$: ni $-a^2$, ni $+a^2$ multiplicado por sí mismo da $-a^4$. Por consiguiente toda Raiz 2ª. 4ª. 6ª. &c. de una quantidad negativa, como $\sqrt{-a}$, no pudiendo ser ni quantidad positiva, ni negativa, debe ser una quantidad *impossible*, ò *imaginaria*, y estas son las que se llaman *Raices impossibles*, ò *imaginarias.*

ARTICULO II.

De la Extraccion de Raices de las quantidades Algebraicas Compuestas.

234 SI atendemos à la formacion de Potencias, repararemos 1º. *Que nin-*

ninguna quantidad Simple, multiplicada por sí misma, da por producto una quantidad Compuesta; por consiguiente la Raiz de una quantidad Compuesta no puede ser una quantidad Simple, ò Monoma, sino que ha de ser necessariamente una quantidad Compuesta, ò de muchos terminos.

2°. *Que* si la Potencia está bien ordenada segun la quantidad de mayor dimension, como hemos dicho en la Division, *el primer termino será la Potencia superior de la primera parte de la Raiz, y el segundo será un producto de una Potencia* (*immediata inferior à la primera*) *de la primera parte de la Raiz, y de la segunda, multiplicado dicho producto por el Exponente del termino antecedente.* Asi en la Potencia 6ª. de $a + b$, el primer termino es a^6, que es la superior Potencia de la primera parte de la Raiz (a), y el segundo $+ 6a^5b$, que es un producto de la Potencia immediata inferior (a^5) de la primera parte de la Raiz, por la segunda parte (b) multiplicado por el Exponente (6) del termino antecedente.

235 De donde sacamos una Regla breve, y general para sacar toda especie de Raices de quantidades Compuestas, asi Algebraicas, como Numericas, haciendo para estas una leve preparacion, como dirémos en su lugar.

Regla

Regla general para ſacar qualquier eſpecie de Raices de quantidades Cõmpueſtas.

Regla. *Diſponganſe los terminos ſegun la mayor dimenſion de alguna de ſus quantidades, ò letras, poniendo por primero aquel en que hubieſſe una letra de mayor dimenſion, y por ſegundo aquel en que dicha letra tubieſſe la dimenſion immediata inferior. Saqueſe la Raiz que ſe buſca de eſte primer termino, y eſta ſerá el primer miembro, ò termino de la Raiz buſcada.*

Para encontrar *el ſegundo: Levanteſe eſte primer termino encontrado à una Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz que ſe buſca, multipliqueſe eſta Potencia por el miſmo Exponente de la Raiz, y ſu producto ſerá un Diviſor, por el qual dividiendo el ſegundo termino, el quociente ſerá el ſegundo termino de la Raiz.*

Para ver ſi la Raiz tiene mas terminos, levanteſe *toda la Raiz encontrada à una Potencia de la miſma denominacion, que el Exponente de la Raiz que ſe buſca, eſto es, à Quadrado ſi ſe buſca la Raiz quadrada, à Cubo ſi ſe buſca la cubica; reſteſe eſte producto de la quantidad dada, cuya Raiz ſe buſca. Si no hai reſta alguna, ſe tienen ya todos los terminos de la Raiz,*

y

y se acabó la operacion. Si queda algo, señal es, que la Raiz tiene algun tercer termino, y hagase para encontrarlo, la misma operacion, que se ha hecho para el segundo, esto es, *levantese toda la Raiz ya encontrada à una Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz que se busca, multipliquese esta Potencia por el Exponente de la Raiz, y por este producto dividase la resta, el quociente será la tercera parte de la Raiz, y assi para los demás terminos, si los hubiesse.*

236 La aplicacion à cada especie particular de Raices aclarará esta Regla.

Aplicacion de la Regla general à la Extraccion de Raices quadradas.

Busquese la *Raiz quadrada* de $a^2 + 2ab + b^2$. Ponganse los terminos como en el Exemplo. Tomese la Raiz quadrada del primer termino a^2, se encontrará ser $a^{\frac{2}{2}} = a$, pongase pues à parte, y esta será la primera parte, ò termino de la Raiz.

Para encontrar el segundo: levantese esta parte encontrada à una Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz que se busca. Pero como se busca la *Raiz quadrada*, cuyo Exponente es 2, se habrá de levantar à la Potencia $2 - 1 = 1$, esto es, à la pri-

primera Potencia, que es la immediata à la ſegunda.

Aſsi ſerá $a^1 = a$, multiplicando eſta Potencia por el Exponente de la Raiz quadrada (2), tendré $2a$, que es *ſu duplo*; dividiendo por eſte el ſegundo termino $2ab$, tendrémos $\frac{2ab}{2a} = b$, pues eſte ſerá el ſegundo miembro de la Raiz, que añadido al primero ſerá $a + b$. Para ver ſi la Raiz tiene algun otro termino, levanteſe $a + b$ à Quadrado, y tendrémos $a^2 + 2ab + b^2$, que reſtandolo de la Potencia dada, no da reſta alguna, pues $a + b$ es la Raiz quadrada de la quantidad dada.

EXEMPLO.

	Quantidad dada.	*Raiz.*
	$a^2 + 2ab + b^2$	$(a + b)$
Diviſor $2a)$	$2ab$	
Quadr. $(a + b) \times (a + b) =$	$a^2 + 2ab + b^2$	
Reſta	0	

237 Dada eſta quantidad $c^2 + 2cd + 2ce + 2de + d^2 + e^2$ para ſacar ſu Raiz quadrada, haciendoſe ſemejante operacion, queda por Reſta $2ce + 2de + e^2$, pues es ſeñal, que la Raiz tiene algun tercer termino. Para encontrarlo, levanteſe la parte ya encontrada de la Raiz $(c + d)$ à la Potencia $2 - 1$, y multiplicandola por el Exponente de la Raiz que ſe buſ-

buſca, tendrémos $(c+d)^{2-1=1} \times 2 = 2c+2d$, por el qual dividaſe dicha Reſta, el quociente ſerá e, el qual añadido à la Raiz encontrada $c+d$, dará $c+d+e$. Para ver ſi todavia hai algun otro termino, quadreſe la Raiz, y el Quadrado quiteſe de la quantidad dada, y no quedando reſta alguna, ſerá $c+d+e$ la Raiz quadrada de la quantidad dada.

EXEMPLO.

Quantidad dada. *Raiz.*

$$
\begin{array}{ll}
g^8-2xg^5+2xg^4-2x^2g+x^2g^2+x^2 & (g^4-xg+x \\
2g^4)-2xg^5 & \\
\underline{g^8-2xg^5+x^2g^2} & \\
2g^4-2xg)\ 2xg^4-2x^2g+x^2 & \\
\underline{g^8-2xg^5+2xg^4-2x^2g+x^2g^2+x^2} & \\
0 &
\end{array}
$$

EXEMPLO.

Quantidad dada. *Raiz.*

$$
\begin{array}{ll}
\frac{pp}{qq}-\frac{2pz}{qn}+\frac{zz}{nn} & \left(\frac{p}{q}-\frac{z}{n}\right. \\
\frac{2p}{q}\Big)\ -\frac{2pz}{qn} & \\
\underline{\frac{pp}{qq}-\frac{2pz}{qn}+\frac{zz}{nn}} & \\
0 &
\end{array}
$$

Apli-

Aplicacion de la Regla general à la Extraccion de Raices cubicas.

238 Para encontrar la *Raiz cubica* de esta quantidad $12hx^2 - 8x^3 + h^3 - 6h^2x$ disponganse los terminos segun las dimensiones de h, como está en el Exemplo. Saquese la Raiz cubica de h^3, que es h, pongase à parte. Como la Raiz cubica tiene por Exponente 3, se habrá de levantar la parte encontrada h à la Potencia $3 - 1 = 2$, esto es, à Quadrado (h^2); multiplicandolo por el Exponente de la Raiz (3), tendrémos $3h^2$ por Divisor del segundo termino $- 6h^2x$, por quien dividiendo este, da por quociente, ò segunda parte de la Raiz $- 2x$. Para ver si hai otro termino, levantese $h - 2x$ à Cubo, se encontrará $h^3 - 6h^2x + 12hx^2 - 8x^3$, que restandolo de la quantidad dada, no dará residuo alguno, pues es señal, que su Raiz cubica es $h - 2x$, como se ve en el siguiente

EXEMPLO.

Quantidad dada. *Raiz.*

$$h^3-6h^2x+12hx^2-8x^3 \ (h-2x$$

Divisor $3h^2\,) - 6h^2x$

Cubo de $h-2x = h^3-6h^2x+12hx^2-8x^3$

0

De la misma suerte se saca la Raiz 4ª. 5ª. 6ª. &c.

Al-

239 Algunas veces sucede, que las quantidades dadas son de tal naturaleza, que hechas, y repetidas todas las operaciones prescritas, siempre hai algun residuo, y entonces es señal, que la tal Raiz no se puede exprimir exactamente con numero alguno finito de terminos, y será por consiguiente una Série infinita tanto mas exacta, quanto mas se vaya prosiguiendo. Asi la Raiz quadrada de $a^2 + x^2$ se encuentra por las leyes dadas ser $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$, &c.

240 Pero como para sacar qualquiera Raiz de qualquier quantidad se divide el Exponente de la Potencia por el de la Raiz, será lo mismo extraher la Raiz (qualquiera) de una quantidad, que levantar la tal quantidad à Potencia de Exponente igual à la Fraccion, que resulta dividiendo el Exponente de la Potencia por el de la Raiz, que se quiere extraher.

Mas como qualquier quantidad Compuesta ès un Binomio, Trinomio, ò Quadrinomio, &c. y qualquiera de estos se puede reducir al Binomio comun $a + b$, exprimiendo el primer termino por a, y la suma de los demás por b, será su Raiz quadrada $(a + b)^{\frac{1}{2}}$, cubica $(a + b)^{\frac{1}{3}}$; luego la Formula general de levantar un Binomio à qualquier Potencia, podrá tambien servir para sacar qualquier Raiz de qualquier quan-

quantidad Polinomia, haciendo el Exponente m igual à la Fraccion, que es Exponente de la Raiz.

Asſi ſi $m = \frac{1}{2}$, ſerá $(a + b)^m = (a + b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a + b)}$; luego ſubſtituyendo a por el primer termino de la quantidad dada, b por la ſuma de los demás, m por el Exponente de la Raiz, ſerá $(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b$, &c. la Formula, que exprimirá la Raiz, ſubſtituyendo en lugar de a, b, m los terminos que le correſponden.

Eſte methodo es expeditiſsimo, en particular para extraher Raices de quantidades Binomias. Aſsi la Raiz quadrada de $a^2 + x^2$ facilmente ſe encuentra por eſte methodo (haciendo $\sqrt{(a^2 + x^2)} = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, $m = \frac{1}{2}$) la miſma que arriba $a + \frac{a^{-1}x^2}{2} - \frac{a^{-3}x^4}{8}$, &c.

Pero ſe ha de advertir, que ninguna Raiz ſe puede encontrar exactamente por eſte methodo, à no ſer, que la Fraccion que exprime m ſea un Entero. Aſsi no ſe podrá encontrar exactamente la Raiz quadrada de $a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + 2ab + b^2)^{\frac{1}{2}}$; pero sí la de $(a + b)^2$, que es $(a + b)^{\frac{2}{2}} = a + b$; pues en eſte caſo $m = 1$.

CAPI-

CAPITULO XIII.

De la Extraccion de Raices de las quantidades Numericas.

ARTICULO PRIMERO.

Regla general para la Extraccion de qualquier genero de Raices de quantidades Numericas.

241 LA Regla para la Extraccion de Raices de quantidades Numericas es la mifma que la de quantidades Algebraicas Compueftas. Solo fe diferencian, en que las quantidades Algebraicas Compueftas tienen fus partes feparadas por los Signos +, ò —, lo que no tienen comunmente los Numeros; pero efta feparacion fe fuple de otra fuerte.

Para facar qualquier Raiz de qualquier quantidad Numerica, *fe ha de preparar la quantidad dada, feparando fus cifras en periodos, que confte cada uno de tanto numero de figuras, como unidades contiene el Exponente de la Raiz que fe bufca, comenzando efta reparticion en perio-*

periodos desde la cifra de las Unidades ácia la izquierda en las cifras de Enteros, y ácia la derecha en las figuras de Decimales.

242 Esta Regla muestra, que para sacar la Raiz *quādrada*, los periodos han de tener *dos* figuras, por ser 2 el Exponente de dicha Raiz, y por la misma razon para sacar la Raiz *cubica*, los periodos han de tener *tres* figuras, excepto el ultimo ácia la izquierda, que en la Raiz quadrada puede tener menos que dos, y en la cubica menos que tres, &c. Hecha esta separacion de periodos, *habrá en la Raiz tantas figuras, quanto es el numero de periodos, en que la quantidad se ha repartido*: lo que es grande ventaja en la Extraccion de Raices Numericas sobre las Algebraicas; pues en estas se necessita de la operacion, para saber de quantos terminos la Raiz conste, quando en las Numericas solo la reparticion en periodos lo demuestra.

Tenganse à mas de esto presentes las Potencias de las Raices simples, esto es, que se exprimen por solo un numero, ò figura, las que se ven en esta Tabla.

Raices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quádrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729

243 Presupuesto todo esto: como la Extraccion de Raices es un genero de Division, la operacion se comienza por la izquierda. Para sacar pues toda especie de Raices:

Regla general. *Saquese la Raiz, que se busca, de la mayor Potencia de esse genero, que esté comprehendida en el primer periodo, y esta Raiz será la primera figura de que conste la Raiz de toda la quantidad.*

Levantese la Raiz encontrada à su Potencia, y este producto, ò Potencia restese del primer periodo. A la resta (si hai alguna) *juntesele la primera figura del segundo periodo, lo qual todo será un nuevo Dividendo. Y para encontrarle un Divisor correspondiente, que dé por quociente la segunda parte de la Raiz, levantese la parte encontrada de la Raiz à una Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz que se busca; multipliquese esta Potencia por el Exponente de la Raiz, y el producto será un Divisor, por el qual dividiendo lo que ha quedado del primer periodo, y la primera cifra del segundo* (menospreciando las demás cifras de este) *el quociente será la segunda parte de la Raiz.*

Para ver si esta Raiz es exacta, ò queda algo, *levantese toda la Raiz encontrada à Potencia del mismo Exponente, que el de la Raiz que se busca.* Si esta Potencia es *menor*, ò *igual* à los dos periodos, la operacion está bien he-

cha;

cha; si es *mayor, disminuyase la ultima parte encontrada de una unidad, hasta que la Potencia de todo lo ya encontrado sea igual, ò inferior à los dos periodos. Restese esta Potencia de los dos periodos juntos, si no queda cosa, ni periodo alguno, la operacion está concluida.*

Si queda algo, y hai mas periodos, *sirvase de toda la parte ya encontrada* para hallar *la tercera, la quarta, la quinta figura, &c.* de la misma suerte que se ha valido de la primera para encontrar la segunda. La aplicacion à la Extraccion de Raiz Quadrada, y Cubica manifestará el uso, y universalidad de esta Regla.

ARTICULO II.

Aplicacion de la Regla general à la Extraccion de Raices Quadradas.

244 HAyase de sacar la *Raiz Quadrada* de esta quantidad 1764. Siguiendo la Regla general precedente, dividase en periodos como se verá en el Exemplo. La Raiz Quadrada del primer periodo 17 es 4, porque el mayor Quadrado, que está comprehendido en el primer periodo es 16, cuya Raiz es 4, que se pone à parte, por ser la primera figura de que consta la Raiz que se busca; levantese la Raiz encontrada (4) à Qua-

 drado,

drado, y ſerá $4 \times 4 = 16$, que reſtandolo del primer periodo 17 queda 1, à quien juntando la primera figura del ſegundo periodo (64) tendrémos el *nuevo Dividendo* 16.

Para encontrarle à eſte nuevo Dividendo Diviſor correſpondiente, que dé por quociente la ſegunda parte de la Raiz, *levanteſe la parte encontrada à Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz*, eſto es, $4^{2-1} = 4$, que multiplicandolo por el Exponente de la Raiz ſerá $2 \times 4 = 8$ el Diviſor, por el qual dividiendo el nuevo Dividendo 16, el quociente ſerá $= 2$, que juntandolo à la parte ya encontrada (4), ſerá la Raiz $= 42$.

Para ver ſi eſta Raiz es exacta, ò ſi hai algun reſiduo, levanteſe 42 à Potencia de Exponente igual al de la Raiz que buſcamos, que en eſte caſo es à *Quadrado*, y tendrémos $42 \times 42 = 1764$, que reſtado de los dos periodos, no da reſiduo alguno; pues ſeñal es, que la Raiz es exacta, y la quantidad dada Quadrado perfecto, y con eſto queda concluida la operacion.

EXEMPLO.

		Raiz.
	17, 64	(42
Quadrado de $4 = 4 \times 4 =$	16	
Diviſor $4 \times 2 = 8)$	1 6	
Quadrado de $42 = 42 \times 42 =$	17 64	
	0	

Sa-

245 Sacando la Raiz Quadrada de esta quantidad 180638, encontrados los dos primeros terminos (42) por operaciones semejantes à las precedentes, resta de los dos primeros periodos 42, que añadido à la primera figura del tercer periodo 3, forma un nuevo Dividendo 423, el qual dividido por 2 × 42 = 84 da por quociente 5, que añadido al lado de 42, forma la Raiz 425. Para ver si esta Raiz es exacta, ò hai algun otro termino, quadrese esta Raiz encontrada, y tendrémos 425 × 425 = 180625, que quitado de los tres periodos, resta 13; de donde se saca, que la quantidad dada no es Quadrado perfecto, y que el Quadrado mayor, que ella contiene es 180625, cuya Raiz es 425.

EXEMPLO.

		Raiz.
	18, 06, 38	(425
Quadrado 4 × 4 =	16	
1r. *Divisor* 2 × 4 = 8)	2 0	
Quadrado 42 × 42 =	17 64	
Resta de los dos periodos	42 3	
2o. *Divisor* 2 × 42 = 84)		
Quadrado 425 × 425 =	18 06 25	
Resta de los tres periodos	13 00	

246 Si à la ultima resta se le añaden periodos de ceros, prosiguiendo la operacion, se

ſe ſacará la Raiz por aproximacion, lo que es general en toda eſpecie de Raices.

247 Algunos (y es lo comun) encontrada la primera parte de la Raiz, y reſtado ſu Quadrado del primer periodo, junta la reſta con el ſegundo periodo, *la dividen* (deſpreciando la ultima figura) *por el duplo de la parte de la Raiz encontrada, ſu quociente* (2) *lo multiplican por sí miſmo, y por el Diviſor* (8), *el producto* (164) *lo reſtan del Dividendo* (2 06). *A la reſta* (42) *junta con el periodo ſiguiente* 38, es à ſaber, 4238, *la dividen por el duplo de la Raiz encontrada* (2 × 42 = 84), *el quociente* (5) *lo multiplican por sí miſmo, y por el Diviſor* (84), *ſu producto* (4225) *lo reſtan del ultimo Dividendo* (4238) y eſcriben las quantidades como ſe ve en los ſiguientes

EXEMPLOS.

Raiz.	*Raiz.*
18,06,38 (425	1,44.60,0 (12.0249
16	1
2 06	44
82	22
1 64	44
42 38	60 00
8 45	24 02
42 25	48 04
13.00	11 9600

La

La ſubſtancia de una Regla, y de otra es la miſma; pero el ſer la Regla dada univerſal para toda eſpecie de Raices, aſsi Numericas, como Algebraicas, Quadradas, Cubicas; &c. el no haber de dar Regla particular para cada una, y el manifeſtarſe por eſte methodo mejor (à mi parecer) los fundamentos de la Extraccion de Raices, me la hace proponer en los terminos ſobredichos: aunque por lo particular de la Raiz quadrada eſte comun methodo es mas expedito, y es bueno ſeguirlo en la practica.

ARTICULO III.

Aplicacion de la Regla general à la Extraccion de Raices cubicas.

248 HAyaſe de ſacar la *Raiz cubica* de eſta quantidad 19152. Como la Raiz cubica tiene por Exponente 3, *cada periodo en que ſe ha de ſeparar la quantidad*, conſtarà de tres figuras, y aſsi ſe habrá de poner 19,152; por conſiguiente habiendo dos periodos, la Raiz cubica de la quantidad dada ſe exprimirá por dos cifras.

Empezando pues la operacion: El mayor Cubo contenido en 19 es 8, cuya Raiz cubica es 2, que pongo à parte, y es la primera cifra de

de que consta la Raiz, y su Cubo 8, restandolo del primer periodo 19, quedan 11, à quien juntando la primera figura del periodo siguiente, será el nuevo Dividendo 111.

Para encontrar Divisor à este nuevo Dividendo (111), que dé la segunda parte de la Raiz, *levantese la Raiz encontrada* (2) *à una Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz que buscamos, y esta Potencia multipliquese por el Exponente de la Raiz.* Como la Raiz que se busca es cubica, cuyo Exponente es 3, se habrá de levantar la parte encontrada (2) à la Potencia de Exponente $3 - 1 = 2$, esto es, à *Quadrado*, y será $2 \times 2 = 4$, que multiplicado por el Exponente de la Raiz da $3 \times 4 = 12$, por el qual dividiendo 111, tendrémos por quociente 8, que juntandolo à la parte ya encontrada 2, será 28. Para ver si esta Raiz es exacta, cubase 28, y será $28 \times 28 \times 28 = 21952$; pero reparo, que este Cubo es mayor que la quantidad de los dos periodos, y assi se habrá de disminuir de una unidad la ultima parte encontrada 8, y será 27, cuyo Cubo 19683 aun es mayor, que los dos periodos, por lo que disminuyase el 7 de una unidad, y tendrémos por Raiz 26, cuyo Cubo $26 \times 26 \times 26 = 17576$ restandolo de los dos primeros periodos, quedan 1576.

249 De donde se infiere, que la quantidad dada no es Cubo perfecto, pero que la Raiz

Raiz del Cubo mayor que ella contiene, es 26. No obstante, si se añadiessen periodos de ceros à la ultima resta, se sacaria la Raiz de la quantidad dada por aproximacion, que sería 26 + la Fraccion Decimal, que iria saliendo con semejantes operaciones. De la misma suerte se encuentra, que la $\sqrt[3]{12812904}$ es 234.

EXEMPLOS.

	Raiz.		*Raiz.*
	19,152 (26		28.934,5 (3.07
	8		27
$3 \times 4 = 12)$	11 1	2700)	1 9345
Cubo de 26 =	17 576		28.9344 43
Resta	1 576.	*Resta*	57

	Raiz.
	12,812,904 (234
$2 \times 2 \times 2 =$	8
$3 \times 4 = 12)$	4 8
Cubo de 23 =	12 167
$3 \times 23 \times 23 = 1587)$	645 9
Cubo de 234 =	12 812 904
	0

250 Si la quantidad Numerica, de quien se ha de sacar la Raiz, fuesse una Fraccion, su Raiz se ha de sacar del Numerador, y Denominador. Assi $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; pero como $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{1}{9}\sqrt{(4 \times 9^{2-1})}$, y en general, por las Reglas que def-

despues darémos, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$, se saca de ahí una Regla expeditissima para sacar qualquier genero de Raices de qualquier Fraccion comun, y es

Regla. *Multipliquese el Numerador por el Denominador elevado à una Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz que se busca, saquese la misma Raiz de este producto, la qual dividida por el Denominador de la Fraccion dada, será la Raiz de la Fraccion, que se pretende.*

Assi $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{(2 \times 3^{2-1})} = \frac{1}{3}\sqrt{6} = \frac{2.449}{3} = 0.816$, $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}\sqrt[3]{5 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6}\sqrt[3]{180} = \frac{5.64}{6} = 0.94$.

Si la quantidad dada, de quien se ha de sacar la Raiz, fuesse quantidad Mixta de Enteros, y Quebrados, ò bien se reduce todo à una Fraccion impropria, ò bien (y es lo mejor) la parte fraccional se reduce à Decimales; y assi de la quantidad de Enteros, y Decimales se saca la Raiz como si todo fuessen Enteros; advirtiendo, que en la Raiz habrá tantas figuras de Enteros, quantos periodos de Enteros hubiesse en la quantidad dada. Si la quantidad dada toda fuesse Decimales, sacandole la Raiz como si fuesse de Enteros (como se debe) todas las cifras de la Raiz serán tam-

tambien Decimales: assi la Raiz quadrada de 0.4 es 0.632. Si las primeras figuras fuessen periodos de ceros; saquese la Raiz de lo demás como si fuessen Enteros, y por cada periodo de ceros, de los que preceden, pongase en la Raiz un cero antes de las cifras significativas. Assi para sacar la Raiz quadrada de .0023456, por preceder un periodo de ceros, saco la Raiz de 23,45,6, que será 4843, à quien añadiendo un cero al principio, tendrémos por su Raiz .04843.

CAPITULO XIV.

Del Calculo de las quantidades Radicales.

251 SI en el Algebra no se usara tanto de abreviacion, sería ocioso este Capitulo; porque supuesto que la Raiz de una Potencia se saca *dividiendo el Exponente de la Potencia por el de la Raiz*, quedando la Raiz de esta suerte una Potencia perfecta, ò imperfecta de la quantidad, si se hiciesse siempre assi esta Extraccion, el Calculo de las Raices, ò quantidades Radicales, sería el mismo que de Potencias Perfectas, ò Imperfectas.

Pero para abreviar se sacan las Raices de las quantidades, poniendo antes de la Potencia el

el ſigno Radical $\sqrt{}$, y ſobre él el *Exponente*, que indica la calidad de Raiz; por conſiguiente para las operaciones con las Raices expreſſadas de eſta ſuerte, ſon meneſter Reglas particulares, pero que todas ſe fundan en que *el Exponente del ſigno Radical en las Raices expreſſadas con él equivale al Denominador del Exponente de las Raices pueſtas à forma de Potencias*; de donde $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

252 Toda quantidad ſe puede exprimir por expreſſion acompañada de eſte ſigno $\sqrt{}$ con qualquier Exponente, porque qualquier quantidad es Raiz de ſus Potencias, con que *elevando la quantidad à Potencia, y poniendola con ſigno Radical de la miſma denominacion, ò Exponente, que la tal Potencia, la quantidad ſe queda la miſma que ſi no fueſſe elevada à Potencia.* Aſſi $a = \sqrt{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[m]{a^m}$, porque $\sqrt[m]{a^m} = a^{\frac{m}{m}} = a$.

253 Las Raices unas ſon *Imaginarias*, ò *Impoſsibles*, porque en realidad ſon quantidades en ſi impoſſibles: tales ſon *las Raices de Exponente par de quantidades negativas*, como $\sqrt[2]{-a}$, $\sqrt[n]{-a^m}$, ſignificando n numero *par*.

Otras ſon Raices *Racionales*, ò lo que es lo miſmo ſon quantidades Racionales, que es de-

decir, que *su Razon con la unidad se puede exprimir exactamente por un numero finito de Terminos, Enteros, Quebrados, ò Mixtos*; pues todo numero por sí mismo exprime la Razon, que tiene à la unidad. Assi la Razon de 4 à 1 es $= \frac{4}{1} = 4$; de aquí es, *que toda Raiz que se pueda exprimir exactamente por numero Entero, Quebrado, ò Mixto, es Racional*, y por tener una comun medida con la unidad, se llama absolutamente *Commensurable* con ella.

254 Otras Raices son *Irracionales*, ò *Surdas*, que es lo mismo, por ser en sí quantidades, *cuya Razon con la unidad no se puede exprimir por finito numero de Terminos, Enteros, Quebrados, ò Mixtos*. Por exemplo $\sqrt{2}$ es una quantidad, ò Raiz Irracional, pues ni es 1, ni 1 + una Fraccion, *que podamos exprimir con numero finito de Terminos*, aunque se pueda sacar dicha Raiz por *aproximacion*, pero jamás *exactamente*. Assi $\sqrt{2} = 1.414$, &c. y por no tener semejantes quantidades alguna comun medida con la unidad, se llaman absolutamente *Incommensurables* con ella.

Son no obstante *Commensurables con ella en Potencia*, si sus Potencias son numeros Racionales. Pueden tambien dos Raices *Incommensurables con la unidad*, ser *Commensurables entre sí*, y tener entre sí una Razon Racional: Tales son $\sqrt{8}$, y $\sqrt{2}$; porque $\sqrt{8} = \sqrt{(2 \times 4)} = 2\sqrt{2}$, y $2\sqrt{2}$ es à $\sqrt{2}$ como 2 à 1: como se

ve

ve en esta analogia $2\sqrt{2} : \sqrt{2} :: 2 : \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$.

255 La Raiz de un Entero debe ser, *ò un Entero, ò un Incommensurable*, pues ninguna Fraccion pura, ni numero Mixto multiplicado por sí mismo, ni por sus productos jamás da un Entero.

De ahí es, *que la Raiz Quadrada de qualquier numero Entero, excepto de* 1, 4, 9, 16, 25, &c. que son los Quadrados de los numeros naturales 1, 2, 3, 4, &c. *es Incommensurable*, como tambien *son Incommensurables qualesquiera Raices de qualquier Entero, excepto de las Potencias de los numeros naturales.*

Las Raices de quantidades Algebraicas son Commensurables, ò Incommensurables con la unidad, segun sean las quantidades por quienes las letras suponen. Assi $\sqrt{cd}$, si $c = 4$, $d = 9$, será $cd = 36$, $\sqrt{cd} = \sqrt{36} = 6$, que es quantidad Racional, y Commensurable. Si $c = 3$, $d = 7$, será $cd = 21$, $\sqrt{cd} = \sqrt{21}$, que es Incommensurable.

Reduccion de quantidades Radicales.

256 Con las quantidades Radicales (sean Racionales, ò Irracionales) se pueden hacer las operaciones de la Arithmetica; pero para esto comunmente se preparan, reduciendolas

à

à Raices de un miſmo Exponente, aſſi como para hacer las dichas operaciones con las Fracciones Comunes, ſe reducen eſtas à un miſmo Denominador.

PROBLEMA I. *Reducir las quantidades Radicales de diferente denominacion, ò Exponente Radical à otras, que tengan la miſma denominacion, ò Exponente, reteniendo el miſmo valor, que cada una en particular tenia antes.*

Regla. *Multipliquenſe mutuamente entrambos Exponentes de ſigno Radical, y Potencia de una quantidad por el Exponente del ſigno Radical de la otra, y quedarán entrambas quantidades Radicales con una miſma denominacion, ò ſerán un miſmo genero de Raices.*

Sean las Raices, que ſe quieren reducir à una miſma denominacion, eſtas $\sqrt[s]{b^r}$, $\sqrt[n]{a^m}$. Multiplicando entrambos Exponentes de la una por el Exponente del ſigno Radical de la otra, ſerán $\sqrt[sn]{b^{rn}}$, $\sqrt[sn]{a^{ms}}$, entrambas tienen un miſmo Exponente en los Signos, y retienen el miſmo valor; porque $\sqrt[s]{b^r} = b^{\frac{r}{s}} = b^{\frac{rn}{sn}} = \sqrt[sn]{b^{rn}}$, y $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{ms}{ns}} = \sqrt[ns]{a^{ms}}$. En ſubſtancia eſto es reducir à un miſmo Denominador los Exponentes de las Potencias perfectas, ò imperfectas, à quienes las Raices equivalen.

PRO-

257 PROBLEMA II. *Reducir una quantidad Radical à Expreſsion mas ſimple.*

Regla. *Mireſe ſi la quantidad, que eſtá baxo el Signo, ò deſpues de él,* que es lo miſmo, *es un producto de cuyos factores el uno ſea una Potencia exacta de Exponente igual al del ſigno Radical. Saqueſe la tal Raiz de eſſe factor, multipliqueſe por la miſma Raiz del otro, y eſte producto ſerá la quantidad Radical reducida à expreſsion mas ſimple, y liſa.*

Hayaſe de reducir à mas ſimple expreſſion $\sqrt{18}$. Por quanto $18 = 9 \times 2$, ſerá $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2}$, pero $\sqrt{9} = 3$; luego $\sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$. Aſſimiſmo $\sqrt{\frac{4}{5}} = 2\sqrt{\frac{1}{5}}$, $\sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{(2 \times \frac{1}{4})} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Reduzgaſe eſta otra $\sqrt[m]{a^n x^m}$. Por quanto $a^n x^m = a^n \times x^m$, ſerá $\sqrt[m]{a^n x^m} = \sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m]{x^m}$, pero $\sqrt[m]{x^m} = x^{\frac{m}{m}} = x$; luego $\sqrt[m]{x^m} \times \sqrt[m]{a^n} = x\sqrt[m]{a^n}$. Eſte genero de reducciones ſe llama tambien *ſacar una quantidad de baxo del Signo*, porque en efecto en eſta expreſſion $\sqrt[m]{a^n x^m}$, la quantidad x eſtá comprehendida, ò afecta del ſigno Radical, y en eſta $x\sqrt[m]{a^n}$ no lo eſtá.

De ahí ſe infiere: *Que toda quantidad, que eſté deſpues del ſigno Radical, ſe puede poner antes*

tes, ò ſacar de él, dividiendo ſu Exponente por el del Signo. Aſſi $\sqrt{ab} = a^{\frac{1}{2}}\sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; y al contrario: *Toda quantidad, que eſté fuera del Signo, ſe puede meter dentro, ò deſpues de él, multiplicando ſu Exponente por el del ſigno Radical.* Aſſi $x\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^n x^m}$. En eſte Problema ſe funda la Regla, que dimos para ſacar qualquier genero de Raices de las Fracciones Comunes; porque $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b} \times \frac{b^n}{b^n}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$.

Tambien ſe reducen las Raices de *mayor* à *menor dimenſion*, quedando ſiempre del miſmo valor, *dividiendo entrambos Exponentes de Signo, y Potencia por una miſma quantidad.* Aſſi $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[2]{a}$ dividiendo por 2, $\sqrt[12]{a^{15}} = \sqrt[4]{a^5}$ dividiendo por 3; porque eſto es lo miſmo que dividir Numerador, y Denominador del Exponente de $a^{\frac{15}{12}}$ por 3; al contrario ſe reduce la Raiz de *menor* à *mayor dimenſion, multiplicando entrambos Exponentes por una miſma quantidad.* Aſſi $\sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{5}{4} \times \frac{3}{3}} = a^{\frac{15}{12}} = \sqrt[12]{a^{15}}$.

Hechas ya las Reducciones oportunas, que

permite la calidad de las quantidades Radicales, los Problemas ſiguientes enſeñarán el modo de Calcular con dichas quantidades.

Las Operaciones Arithmeticas con las quantidades Radicales.

258 PROBLEMA I. *Sumar, y Reſtar quantidades Radicales.*

Regla. *Si ſon Raices ſemejantes de una miſma quantidad, y Potencia: Sumenſe, ò Reſtenſe ſus coeficientes; y multipliqueſe la Suma, ò la Reſta por la quantidad Radical, y eſte producto ſerá la Suma, ò la Diferencia de las quantidades dadas.*

Aſſi $3\sqrt{ab} + 5\sqrt{ab} = 8\sqrt{ab}$, $4\sqrt[m]{a^n} - 3\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^n}$.

Pero ſi à las Radicales dadas les faltaſſe alguna de las *tres* condiciones dichas, la Suma, y Reſta ſe hacen como en las quantidades Algebraicas deſemejantes.

259 PROBLEMA II. *Multiplicar, y Dividir quantidades Radicales.*

Si las quantidades Radicales no fueſſen de una miſma denominacion, reduzganſe à una denominacion miſma. Eſto hecho: Regla. *Multipliquenſe, ò dividanſe entre sí las quantidades, que eſtán baxo el Signo, y al producto, ò quociente pongaſele el ſigno Radical comun.* Eſ-

ta

ta Regla ſe eſtiende, ſean las que fueſſen las quantidades, y Potencias.

Aſſi hayaſe de Multiplicar $\sqrt[3]{b}$ por $\sqrt[4]{c}$, reduciendolas à una miſma denominacion, ſerá $\sqrt[12]{b^4} \times \sqrt[12]{c^3} = \sqrt[12]{b^4c^3}$. Hayaſe de Dividir $\sqrt[3]{b}$ por $\sqrt[4]{c}$, hecha la Reduccion, ſerá el quociente $\sqrt[12]{\frac{b^4}{c^3}}$.

Si en los factores, ò en el Dividendo, ò Diviſor hubieſſe quantidades fuera del Signo, en el quociente, ò en el producto ſe habrá de quedar ſu quociente, ò producto fuera del Signo. Por lo tanto $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$, $3\sqrt{a} \times 4\sqrt{b} = 12\sqrt{ab}$.

Tengaſe tambien preſente en la Multiplicacion, y Diviſion de quantidades Radicales, la Regla general de los Signos $+$, ò $-$, la qual Regla en las Radicales *imaginarias* no ſe eſtiende à los Signos, que eſtán deſpues del ſeñal Radical.

260 Como las Raices, ò quantidades Radicales ſon abſolutamente quantidades, que ſe pueden multiplicar por sí miſmas, ſe podrán tambien levantar à Potencias. Mas ellas tambien ſerán Potencias de otras quantidades inferiores; por conſiguiente ſe podrán ſacar ſus Raices, que ſerán *Raices Segundas*, ò Raices de Raices.

Por lo qual: *Para levantar una Raiz à qual-*

quier Potencia, multipliquese solo el Exponente de la quantidad Radical por el de la Potencia que se busca, y para sacar la Raiz de una quantidad Radical, multipliquese el Exponente del Signo por el de la Raiz que se busca.

Assi $\sqrt[n]{a^m}$ levantado à la Potencia s será $\sqrt[n]{a^{ms}}$; porque $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, el qual levantado à la Potencia s será $a^{\frac{ms}{n}} = \sqrt[n]{a^{ms}}$. De aquí es, *que si la Potencia, à que se quiere levantar, fuesse de la misma denominacion, que el Exponente de la Raiz dada, bastará para la operacion borrar el signo Radical con su Exponente;* porque $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, el qual levantado à la Potencia n será $a^{\frac{mn}{n}} = a^m$.

261 Al contrario la Raiz s de $\sqrt[n]{a^m}$ será $\sqrt[sn]{a^m}$; porque $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, el qual reducido à su Raiz (s) será $a^{\frac{m}{ns}} = \sqrt[ns]{a^m}$.

Pero si la Raiz (s) de una quantidad Radical $\sqrt[n]{a^m}$ se sacára por abreviacion, sería $\sqrt[s]{\sqrt[n]{a^m}}$, y en tal caso la Raiz primera $\sqrt[n]{a^m}$ se habria de considerar como quantidad absoluta. Por lo tanto en la Multiplicacion,

cion, y Division de $\sqrt[s]{\sqrt[n]{a^m}}$, se habria de contar con el segundo signo Radical $\sqrt[s]{}$, para hacer las operaciones.

En las quantidades Radicales *Polinomias*, ò de muchos Terminos la Multiplicacion se hace por el methodo comun de la Algebra, guardando las Reglas superiores. En la Division, comunmente por no enredarse, se hace por abreviacion, poniendo el Dividendo por Numerador, y el Divisor por Denominador. Assi $\sqrt{ab} + \sqrt[m]{dc}$ dividido por $\sqrt[3]{d} - \sqrt[4]{dc}$, nos dará por quociente $\dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt[m]{dc}}{\sqrt[3]{d} - \sqrt[4]{dc}}$.

CAPITULO XV.

De la Progression Arithmetica.

262 LA Progression Arithmetica es una *Proporcion Arithmetica continuada à muchos terminos*: ò una *Série de quantidades, ò terminos, que aumentan successivamente* (si la Progression es creciente) *ò dissminuyen* (si es decreciente) *con una misma*,

ma, y constante Diferencia de cada uno à su immediato. Esta es una Progression, que va aumentando $a . a+d . a+2d . a+3d . a+4d$. *&c.* Esta va disminuyendo $x . x-d . x-2d . x-3d . x-4d$. *&c.* En una, y otra Progression la Diferencia constante es d.

De donde se ve, que si la Progression es *creciente*, cada termino, excepto el primero, es la *Suma del primero, y de la Diferencia una, ò muchas veces tomada*; y que estas Diferencias desde el segundo termino van formando una Progression Arithmetica $d . 2d . 3d . 4d$. *&c.* Si la Progression es *decreciente*, cada termino, excepto el primero, es *el primero menos la Diferencia comun una, ò muchas veces tomada*, las quales Diferencias van tambien formando otra Progression Arithmetica $-d . -2d . -3d$. *&c.* Lo mismo que hemos dicho de los terminos Algebraicos, se ha de entender quando estos son Numericos, como ÷ 1 . 2 . 3 . 4 . &c. ÷ 3 . 2 . 1 . 0 . — 1 . — 2 . &c.

263 THEOREMA I. *En toda Progression Arithmetica la Suma del Primero, y Ultimo termino es igual à la Suma de qualesquiera otros dos terminos igualmente distantes de los extremos, y al duplo del medio, si el numero de terminos es impar.*

Sea la Progression esta $a . a+d . a+2d . a+3d$. *&c.* hasta el ultimo termino x, el penultimo será $x-d$, el antepenultimo $x-2d$.

Pues

Pues las *Sumas* del primero, y ultimo; del segundo, y penultimo, &c. son iguales entre sí, como se ve.

$$\begin{array}{l} a \;.\; a+d \;.\; a+2d \;.\; a+3d \;.\; a+4d \\ x \;.\; x-d \;.\; x-2d \;.\; x-3d \;.\; x-4d \\ \hline \textit{Sumas}\; a+x,\; a+x,\; a+x,\; a+x,\; a+x. \end{array}$$

Y si el numero de terminos es *impar*, como en estas dos Séries, será en la *creciente* $a+a+4d=2a+4d$, duplo del medio $a+2d$; y en la *decreciente* $x+x-4d=2x-4d$, duplo de $x-2d$.

264 THEOREMA II. *La Suma de todos los terminos en qualquier Progression Arithmetica es igual à la Suma del Primero, y del Ultimo, multiplicada por la mitad del numero de terminos*: ò lo que es lo mismo, *à la mitad de la Suma de los extremos, multiplicada por el numero de terminos.*

Porque siendo la suma del primero, y ultimo termino igual à la suma de qualesquiera otros dos terminos, igualmente distantes de los extremos, habrá tantas sumas de extremos, ò sus iguales, como la mitad del numero de terminos: assi si el primer termino es a, el ultimo x, y el numero de terminos n, será la suma $s=(a+x)\times\frac{n}{2}$.

265 Siendo la comun Diferencia en qualquier Progression Arithmetica d, y no encontrandose

trandoſe eſta Diferencia en el primer termino, *ſu coeficiente en qualquier termino de la Progreſsion ſerá igual al numero de terminos, que à eſte termino le preceden.* Y aſſi ſiendo el numero de terminos n, en el ultimo termino x el coeficiente de la Diferencia (d) ſerá $n - 1$; de donde $x = a + (n - 1)d$, ſi la Progreſſion es creciente; ò bien $x = a - (n - 1)d$, ſi es decreciente.

266 Por lo tanto en qualquier Progreſſion, dado el primer termino (a), la Diferencia (d), y quanto qualquier termino diſta del primero, eſto es, ſi es el *ſegundo*, el *tercero*, *&c.* en la Progreſſion, ſe podrá encontrar ſu valor; pues ſiempre *es igual à la ſuma del primero, y de la Diferencia tomada tantas veces, quanto es el numero de terminos, que le preceden* (ſi la Progreſſion es creciente) *ò al primero menos eſta Diferencia tantas veces tomada, quanto es el numero de terminos, que le precceden* (ſi la Progreſſion es decreciente.)

Aſſi porque al *quarto* termino de la Progreſſion le preceden tres, ſerá eſte $a + 3d$; porque al *quinto* le preceden quatro, ſerá $a + 4d$. Y como al ultimo de la Progreſſion le preceden todos menos uno, ſiendo n el numero de todos, ſerá el ultimo $a + (n - 1)d$; pero la ſuma de toda la Progreſſion es la ſuma del primero, y del ultimo, multiplicada por la mitad del numero de terminos, ſerá

rá

rá la dicha ſuma $= S = (2a + (n - 1)d)\frac{n}{2} =$ $\frac{2an + n^2d - nd}{2} = (a + x)\frac{n}{2}$. Por exemplo en eſta Progreſsion 1 . 2 . 3 . 4 . &c. llegando haſta 95 terminos, ſerá $a = 1$, $n = 95$, $d = 1$, ſubſtituyendo eſtos valores en la Formula general, ſerá ſu ſuma $\frac{2 \times 95 + 95^2 - 95}{2} = 4560$.

267 La Progreſsion Arithmetica (como tambien la Geometrica) puede tener por ſu primer termino 0, como eſta 0 . 1 . 2 . 3 . &c. ò bien eſta otra 0 . 3 . 6 . 9 . &c. porque ſiempre la Diferencia es una miſma; en la primera es 1, y en la ſegunda 3. Pues *en la Progreſſion Arithmetica, cuyo primer termino es 0, la ſuma de todos los terminos es igual à la mitad del producto del ultimo termino por el numero de terminos*: Porque ſubſtituyendo 0 en lugar del primer termino a, en la Formula univerſal $S = (a + x)\frac{n}{2}$, ſerá $S = (0 + x)\frac{n}{2} = \frac{xn}{2}$, y ſe ve en la Progreſsion 0 . 1 . 2 . &c. haſta 10 terminos, cuya ſuma es $0 + 1 + 2$ &c. $= \frac{10 \times 9}{2} = 45$.

268 De lo dicho haſta aquí, mediante las Reglas de las Equaciones, que darémos en la ſegunda Parte, ſe encuentran las *Formulas*, que exprimen el valor de todas las coſas, que para la practica ſe ſuelen buſcar en qualquier Pro-

Progresſion Arithmetica, es à ſaber, el *Primer termino* (A) de la Progresſion, el *Ultimo* (X), *qualquiera de los Intermedios* (M), la *Suma de todos* (S), la *Diferencia*, que reina en los terminos (D), el *Numero de terminos* (N), que haya en la Progresſion, y (P) el *Numero de terminos*, que preceden el que buſcamos.

$$A = X + D - ND \qquad X = A + (N - 1)D$$

$$M = A + PD \qquad S = (A + X)\frac{N}{2}$$

$$N = \frac{2S}{A + X} \qquad D = \frac{X - A}{N - 1}$$

de manera, que dadas tres coſas de las ſeis arriba dichas, ſe encuentran las otras tres.

Como toda Progresſion es *creciente* comenzando por un extremo, y *decreciente* comenzando por otro; eſtas Formulas, que ſon para la Progresſion creciente, podrán tambien ſervir para la decreciente, comenzando à contarla del extremo de donde comienza à crecer.

269 PROBLEMA. *Encontrar quantos terminos ſe quiera* (m) *entre dos terminos dados, de manera, que con ellos formen una Progreſsion Arithmetica.*

Toda la dificultad eſtá en encontrar la *Diferencia*, que debe reinar en eſta Progresſion; porque el primero dado + *eſta Diferencia* ſerá el ſegundo, &c.

Re-

Regla. *Dividase la Diferencia de los dos terminos dados por* m + 1, *y el quociente será la Diferencia, que debe reinar en la Progresion.* Hayanse de buscar *quatro* terminos entre 7, y 13, que con ellos formen una Progresion. Como la Diferencia de 13 à 7 es 6, será la *Diferencia reinante* en la Progresion $\frac{6}{m+1} = \frac{6}{4+1} = \frac{6}{5} = 1.2$; pues añadiendo esta Diferencia al primer termino dado 7, tendrémos el segundo $7 + 1.2 = 8.2$, y los terminos de la Progresion serán 7, 8.2, 9.4, 10.6, 11.8, 13.

Este Problema puede servir, para que dada una Progresion Arithmetica, se puedan estrechar sus terminos, disminuyendo las Diferencias, que es meter quantos terminos se quiera entre uno, y otro.

CAPITULO XVI.

De la Progresion Geometrica.

270 LA Progresion Geometrica es *una Série de terminos, que están en Proporcion Geometrica continua*, ò lo que es lo mismo, *se van succesivamente aumentando por un mismo Multiplicador*, si la Progresion

gresion es *creciente*, ò *successivamente dissminuyendo por un mismo Divisor*, si es *decreciente*.

$$\text{Assi}\begin{cases} a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 : ar^5 : x \text{ es } \textit{creciente}, \\ a : \frac{a}{r} : \frac{a}{r^2} : \frac{a}{r^3} : \frac{a}{r^4} : \frac{a}{r^5} : x \text{ es } \textit{decreciente}. \end{cases}$$

Como los terminos de la Progression están en proporcion continua, la missma Razon que tiene el primero al segundo, tiene el segundo al tercero, el tercero al quarto, &c. Y assi una, y la missma es la Razon que tienen entre sí todos los terminos con sus immediatos siguientes, que por esso se llama *Razon comun de la Progression*, cuyo Exponente es el *Multiplicador*, por cuya multiplicacion los terminos se aumentan, ò el *Divisor*, por quien se dissminuyen, que en entrambas Séries es r.

271. THEOREMA I. *En toda Progression Geometrica el producto de los extremos es igual al producto de qualesquiera dos medios igualmente distantes de los extremos.*

Sean los quatro primeros terminos de una Progression a, ar, ar^2, ar^3, *&c.* y el ultimo x, será el penultimo $\frac{x}{r}$, el antepenultimo $\frac{x}{r^2}$, el otro $\frac{x}{r^3}$. El producto del primero, y ultimo será ax, del segundo, y penultimo $ar \times \frac{x}{r} = ax$, del tercero, y antepenultimo $ar^2 \times \frac{x}{r^2} = ax$, *&c.*

Si el numero de terminos de la Progression es impar,

impar, el producto de los extremos, ò de otros dos igualmente distantes de los extremos es igual al Quadrado de el del medio.

Assi en las Progressiones propuestas, será $a \times ar^6 = ar^3 \times ar^3 = a^2r^6$, $a \times \frac{a}{r^6} = \frac{a}{r^3} \times \frac{a}{r^3} = \frac{a^2}{r^6}$.

272 THEOREMA II. *En qualquier Progression*, sea su numero de terminos par, ò impar, *la suma de todos los terminos menos el primero es igual à la suma de todos menos el ultimo, multiplicada por el comun Exponente de la Progression*, esto es, $s - a = (s - x)\,r$.

Porque como toda Progression es una Proporcion continua, todos los terminos son antecedentes menos el ultimo, y todos son consiguientes menos el primero, y la suma de los antecedentes es à la suma de los consiguientes, como el un antecedente à su consiguiente; luego en la Progression propuesta tendrémos $s - x : s - a :: a : ar$; y multiplicando extremos, y medios, será $sar - arx = sa - a^2$; dividiendo todos los terminos por a, será $s - a = sr - xr = (s - x)\,r$, y por las Reglas que darémos en las Equaciones, $sr - s = xr - a$; de donde finalmente $s = \frac{xr - a}{r - 1}$, Formula que exprime la *Suma* de todos los terminos de qualquiera Progression Geometrica.

273 En la Progression ascendiente propuesta $a : ar : ar^2 : ar^3$: *&c.* cada termino es el pro-

producto del primero (a), y del *Exponente* de la Razon comun de la Progresion (r), elevado este Denominador à Potencia de Exponente igual al *numero* de terminos, que à este termino le preceden. Assi el *tercer* termino ar^2, es el producto de a por r, elevado à la Potencia segunda.

En la Progression descendiente cada termino es el primero dividido por el Exponente de la Razon comun, elevado à Potencia de Exponente igual al numero de terminos, que le preceden. Assi el *tercer* termino en la Progression decreciente es $\frac{a}{r^2}$; luego *en qualquier Progression ascendiente, dado el primer termino, y el Exponente de la Razon comun, encontrarémos qualquier otro termino, multiplicando el primer termino por dicho Denominador elevado à Potencia de Exponente igual al numero de terminos, que le preceden.* Assi si se quiere encontrar el *quinto*, este será ar^4, el *sexto* será ar^5.

En la Progression descendiente qualquier termino será el quociente del primero dividido por el Exponente de la Razon comun elevado à Potencia de Exponente igual al numero de terminos, que preceden. Assi el *quarto* termino será $\frac{a}{r^3}$, el *quinto* $\frac{a}{r^4}$.

De donde siendo n el numero de terminos de toda la Progression, será el ultimo termino

no x en la Progresion ascendiente $= ar^{n-1}$, y en la descendiente $x = \frac{a}{r^{n-1}}$. Por lo qual si en la Formula de arriba $s = \frac{xr-a}{r-1}$, que exprime la suma de todos los terminos de la Progresion, substituyo en lugar de x, su igual, ò su valor ar^{n-1},

$$\text{será } s = \frac{xr-a}{r-1} = \frac{ar^{n-1}r-a}{r-1} = \frac{ar^n-a}{r-1}.$$

274 De lo dicho hasta aquí, manejando las Reglas, que darémos sobre las Equaciones, se infieren las Formulas, para encontrar el valor de quanto para la practica se busca en las Progresiones, es à saber, el *Primer termino* de la Progresion (A), el *Ultimo* (X), cada termino en particular, como el *Tercero*, el *Quarto*, *&c.* (M), la *Suma* de todos ellos (S), el *Exponente de la Razon comun*, que reina en toda la Progresion (R), finalmente el Numero de terminos (n), de que consta la Progresion, significando p el Numero de terminos, que preceden à cada uno.

$$A = \frac{S(R-1)}{R^n-1} \qquad S = \frac{A(R^n-1)}{R-1} \qquad R = \sqrt[n-1]{\frac{X}{A}}$$

$$X = AR^{n-1} \qquad R^n = \frac{XR}{A} \qquad M = AR^p$$

Esta penultima Formula $R^n = \frac{XR}{A}$, que exprime

me el numero *n* de terminos de la Progreſsion, neceſsita de alguna explicacion, y es, que el Numero de terminos *n*, es igual al Exponente, que tenga la Potencia del *comun* Denominador *r*, que ſea igual al producto del ultimo termino, y del comun Exponente, dividido por el primer termino *a*, es à ſaber $\frac{xr}{a}$.

Eſtas Formulas ſirven para la Progreſsion Geometrica de la miſma ſuerte, que las del Capitulo precedente para la de la Arithmetica.

275 PROBLEMA. *Meter un numero* (m) *de terminos proporcionales entre los terminos de una Progreſsion Geometrica.*

Como en toda Progreſsion Geometrica los terminos ſon un producto del primero, que es conſtante (*a*), por una Potencia del comun Multiplicador (*r*), y eſtas Potencias eſtán tambien en Progreſsion Geometrica r^0, r^1, r^2, r^3, *&c.* cuyos Exponentes eſtán en proporcion Arithmetica: encontrados los medios *Arithmeticos Proporcionales* entre los Exponentes de las Potencias del comun Multiplicador, encontrarémos los Exponentes de las Potencias del Multiplicador comun, que multiplicadas por el primer termino, compondrán los terminos intermedios, que harán la Progreſsion Geometrica. Y aſsi *dividaſe la Diferencia de los Exponentes del comun Multiplicador, ò Diviſor por* m + 1, *y eſte quociente ſerá la Diferencia,*

rencia, que debe reinar entre los Exponentes de las Potencias del comun Multiplicador, ò Divisor, que multiplicadas por el primer termino (si la Progresion es creciente) *ò dividido este por ellas* (si es decreciente) *compondrán los terminos intermedios.*

Hayanse de meter *quatro* terminos Geometrico Proporcionales entre cada uno de los terminos de esta Progresion ar^0, ar^1, ar^2, ar^3, *&c.* Se ve, que los Exponentes del comun Multiplicador (r) forman una Progresion Arithmetica 0, 1, 2, 3, &c. cuya Diferencia es 1, pues la Diferencia de los Exponentes de los terminos intermedios será $\frac{1}{m+1} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$; y asi será la nueva Progresion ar^0, $ar^{\frac{1}{5}}$, $ar^{\frac{2}{5}}$, $ar^{\frac{3}{5}}$, $ar^{\frac{4}{5}}$, ar^1, $ar^{\frac{6}{5}}$, *&c.* en donde se ve, que en medio de los dos terminos de la Progresion dada ar^0, ar^1 se han metido quatro medios proporcionales, que forman con ellos una nueva Progresion. Si la Proporcion fuere decreciente $\frac{a}{r^0}$, $\frac{a}{r^1}$, *&c.* serian $\frac{a}{r^0}$, $\frac{a}{r^{\frac{1}{5}}}$, $\frac{a}{r^{\frac{2}{5}}}$, *&c.*

CAPITULO XVII.

De la Proporcion, y Progression Harmonica.

276 LA *Proporcion Harmonica*, que otros llaman *Proporcion Musica*, es cierta especie de Proporcion Geometrica, en la qual si la Proporcion Harmonica es *Continua*, el *Primer termino tiene al Tercero la misma Razon Geometrica, que la Diferencia entre el Primero, y Segundo tiene à la Diferencia entre el Segundo, y Tercero*; y si la Proporcion Harmonica es *Discreta*, el *Primer termino tiene la misma Razon Geometrica al Quarto, que la Diferencia entre el Primero, y Segundo tiene à la Diferencia entre el Tercero, y Quarto.*

En fuerza de estas dos Definiciones de la Proporcion Harmonica *Continua*, y *Discreta*; en la Continua, supuestos los très terminos A, B, C, serà $A : C :: A - B : B - C$; de donde resultan las siguientes Formulas:

$$A = \frac{B \times C}{2C - B} \quad B = \frac{2A \times C}{C + A} \quad C = \frac{B \times A}{2A - B}.$$

Dados dos qualesquiera de los *tres* terminos, se encuentra el otro.

277 Para la Proporcion Harmonica Discreta,

creta, siendo sus quatro terminos A, B, C, D, tendrémos $A : D :: A - B : C - D$; de donde

$$A = \frac{D \times B}{2D - C} \qquad B = \frac{A \times (2D - C)}{D}$$

$$C = \frac{D \times (2A - B)}{A} \qquad D = \frac{C \times A}{2A - B}.$$

Con que dados tres qualesquiera terminos, se encontrará tambien el otro.

Pero como la Proporcion Harmonica es de bastante uso en la Optica, y en aquella parte de la Physica, que trata del *Sonído*, es menester explicar algunas Propriedades de la *Progression Harmonica*, que tambien es una Continua Proporcion alargada à mas de tres terminos. Para lo qual sean los terminos de la Progression Harmonica A, B, C, D, E, F, &c. y las Diferencias respectivas entre cada dos immediatos } M, N, O, P, Q, &c.

278 THEOREMA I. *El Producto de los dos primeros terminos de la Progression Harmonica es al Producto de qualesquiera otros dos immediatos entre sí, como sus respectivas Diferencias.* Esto es $A \times B : C \times D :: M : O$.

Porque por la naturaleza de la Proporcion Harmonica, será $A : C :: M : N$
$B : D :: N : O$

luego $A \times B : C \times D \; (:: M \times N : N \times O) :: M : O$.

Mas

Mas por la miſma razon ſerá

$$A : C :: M : N$$
$$B : D :: N : O$$
$$C : E :: O : P$$

luego $A \times B \times C : C \times D \times E :: M \times N \times O : N \times O \times P$.

Eſto es $A \times B : D \times E :: M : P$;
y aſsi ſe puede proſeguir la demonſtracion en todos los demás terminos de la Progreſsion Harmonica.

279 THEOREMA II. *La Diferencia* M *entre los dos Primeros terminos de la Progreſsion Harmonica es à la Diferencia* O *entre qualeſquiera otros dos immediatos entre sí* $:: B - 2M : D$.

De la miſma ſuerte $M : P :: B - 3M : E$, y $M : Q :: B - 4M : F$, &c.

Porque por la naturaleza de eſta Progreſſion tenemos $A : C :: M : N$; pero $A = B - M$, luego $B - M : C :: M : N$ (y para que deſde el principio ſe vea la lei, que guardan, reduciendolo à debida forma, ſerá $M : N :: B - 1M : C$.)

Alternando, $B - M : M :: C : N$, y dividiendo $B - 2M : M$ ($:: C - N : N$) $:: B : N$; pero $B : N :: D : O$, luego $M : O :: B - 2M : D$.

En fin $B - 3M : M$ ($:: D - O : O :: C : O$) $:: E : P$, luego $M : P :: B - 3M : E$, &c.

En general ſea $n =$ al Numero de terminos, que median entre el Primero, y Ultimo Z de la Progreſsion, y la Diferencia entre el Ultimo, y Penultimo ſea S, ſerá ſegun el miſmo modo de diſcurrir $M : S :: B - nM : Z$.

Aña-

Añadese, que supuestos los dos ultimos terminos de la Progresion Y, y Z, por el Theor. 19. tendrémos $M : S :: A \times B : Y \times Z$; por consiguiente en fuerza de estas dos ultimas analogias, será $A \times B : Y \times Z :: B - nM : Z$.

Siendo $A \times B : B \times C :: M : N :: B - M : C$, será $A \times B : B \times C :: B - M : C$; dividiendo los consiguientes por C, tendrémos $A \times B : B :: B - M : 1$, luego $B = \frac{A \times B}{B - M}$. Tambien por ser $A \times B : D \times C :: B - 2M : D$, será $C = \frac{A \times B}{B - 2M}$; y en general siendo $A \times B : Y \times Z :: B - nM : Z$, será $Y = \frac{A \times B}{B - nM}$.

Supuesto pues $n =$ al Numero de terminos entre A, y Z, exprimirá n el lugar, ò puesto, que tenga Y en la Progresion, ò lo que es lo mismo el Numero de terminos, que le preceden; de donde para encontrar qualquier termino de la Progresion Harmonica:

Regla general. *Qualquiera termino de la Progresion Harmonica es igual al Producto del Primero por el Segundo, dividido por el Segundo, menos la Diferencia entre el Primero, y Segundo multiplicada por el Numero de terminos, que preceden al termino que buscamos*; pues precediendo n terminos à Y, será $Y = \frac{A \times B}{B - nM}$.

Assi dados estos dos primeros terminos 10,

12 de una Progreſsion Harmonica, el Tercero es $\frac{10 \times 12}{12 - 2 \times 2} = 15$, el Quarto $\frac{10 \times 12}{12 - 3 \times 2} = 20$, finalmente el Sexto $\frac{10 \times 12}{12 - 5 \times 2} = 60$; pues ſiempre $Y = \frac{A \times B}{B - nM}$.

280 Pero una coſa particular hai en la Progreſsion Harmonica, que no ſucede en la Arithmetica, ni Geometrica, y es, que qualquiera de eſtas dos ſe puede proſeguir al *infinito*; pero la Harmonica ſe limita à un determinado numero de terminos, ſegun fueſſen los dos Primeros, pues immediatamente paſſado el ultimo, ya el Denominador de eſta Formula, que exprime el valor de qualquier termino $Y = \frac{A \times B}{B - nM}$, es o.

Aſsi ſiendo los dos Primeros terminos los propueſtos 10, 12, el Sexto es $\frac{10 \times 12}{12 - 5 \times 2} = 60$; pero el Septimo es $\frac{10 \times 12}{12 - 6 \times 2} = \frac{120}{0}$, que es, ò bien cero, ò bien infinito, y aſsi ſe limita la tal Progreſsion à ſolos ſeis terminos, aunque vuelve à empezar en el octavo.

281 THEOREMA III. *Los Terminos de una Progreſsion Harmonica ſon entre sí como las Quantidades, cuyos Reciprocos forman una Progreſsion Arithmetica.*

Aque-

Aquellos Terminos ſon entre sí *Reciprocos*, cuyo producto de entrambos es la Unidad, tales ſon a, y $\frac{1}{a}$, &c.

Por lo aquí dicho los Terminos de la Progreſsion Harmonica ſuperior A, B, C, D, &c. ſon entre sí como $\frac{A \times B}{B}$, $\frac{A \times B}{B - M}$, $\frac{A \times B}{B - 2M}$, &c. y dividiendo por A × B, como $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B - M}$, $\frac{1}{B - 2M}$, &c. cuyos Recíprocos B, B — M, B — 2M, &c. ſon una Progreſsion Arithmetica.

Lo que hemos diſcurrido haſta aquí de la Progreſsion Harmonica ſe entiende de la Progreſsion Creciente, pero ſi la Progreſsion fueſſe Decreciente, los reſultados ſerian los miſmos, excepto que los Signos de M, y B ſerian contrarios; porque en tal caſo $A - B = M$, $B - C = N$, pero en la Creciente $B - A = M$.

CAPITULO XVIII.

De los Logarithmos en Comun.

282 PAra entender bien eſta materia de Logarithmos, ſe ha de tener preſente lo que hemos dicho de las Progreſsiones Geometrica, y Arithmetica, de las Razones

zones Compueſtas en los terminos, que forman una Série, y de la Multiplicacion, y Diviſion de las Potencias de una miſma Raiz por medio de ſus Exponentes. Eſto ſupueſto:

Los *Logarithmos* ſon *los Terminos de una Progreſsion Arithmetica aplicados à los de una Progreſsion Geometrica, de manera que la Suma de dos, ò más de la Progreſsion Arithmetica, correſponda al Producto de los de la Geometrica*; por conſiguiente la *Diferencia* de dos de la Progreſsion Arithmetica, correſponde al *Quociente*, que reſulta de la diviſion de uno por el otro de los de la Progreſsion Geometrica.

Sean eſtas dos Progreſsiones.

Geometrica 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : &c.
Arithmetica 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . &c.

Tomemos la *Suma* del Segundo, y del Tercero de la Progreſsion Arithmetica, eſto es, $1 + 2 = 3$, pues eſte pertenece à 8, producto de 2×4 en la Progreſsion Geometrica. Tomemos la *Suma* del Tercero, y Quarto $2 + 3 = 5$, que correſponde en la Geometrica à 32, producto de 4×8. De la miſma ſuerte ſale en qualquier Suma, de quantos terminos quiera, de la Progreſsion Arithmetica, que ſiempre correſponde al producto, cuyos factores ſon los terminos correſpondientes à las partes de la Suma.

Para ver como la *Diferencia* de los terminos de la Progreſsion Arithmetica correſponde

de al *Quociente* de los de la Geometrica, tomemos la Diferencia de dos Logarithmos $4 - 3 = 1$ Logarithmo de $\frac{16}{8} = 2$: asimismo $6 - 3 = 3$ Logarithmo de $\frac{64}{8} = 8$; pues se ve, que la Diferencia de dos terminos de la Progresion Arithmetica corresponde al Quociente de sus respectivos terminos de la Geometrica: y asi cada termino de la Progresion Arithmetica es Logarithmo de su correspondiente en la otra Progresion.

283 Lo que hemos hecho en estas dos Séries particulares, hagamoslo en Séries universales, de suerte que la Geometrica comience de 1, y la Arithmetica de 0,

$$\text{serán} \begin{cases} \dot{\dot{\div}}\ 1 : x : x^2 : x^3 : x^4 : x^5 : x^6 : x^7 : \&c. \\ \div\ 0 . a . 2a . 3a . 4a . 5a . 6a . 7a . \&c. \end{cases}$$

Vease como sucede lo mismo que la *Suma* de los Logarithmos es Logarithmo del producto de las Potencias correspondientes: asi $2a + 4a = 6a$ Logarithmo de $x^2 \times x^4 = x^6$; y la Diferencia de los Logarithmos es Logarithmo del Quociente de las Potencias correspondientes divididas entre sí, $4a - 3a = a$ Logarithmo de $\frac{x^4}{x^3} = x$.

Lo mismo que hemos experimentado en estas dos Séries subiendo desde 1, y desde 0 ácia

ácia arriba, encontrarémos prosiguiendolas assi abaxo:

$$\div\!\div\ 1 : \frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} : \frac{1}{x^4} : \frac{1}{x^5} : \frac{1}{x^6}$$

$$\div\ 0 . -a . -2a . -3a . -4a . -5a . -6a.$$

284 De esta sola Definicion, ò principal Propriedad de los Lògarithmos se infieren muchas cosas utilissimas para la practica.

1º. *Que solo puede haber Logarithmos respecto de Potencias de una misma Raiz*, la qual Raiz, que en la superior Série es x, se llama *Base Logarithmica*, y que la Série de essas Potencias debe empezar de 1.

2º. *Que en toda especie de Logarithmos siempre el Logarithmo de la unidad*, ò de 1, ò el primer termino de la Progression Arithmetica *debe ser* 0; porque assi como 1 ni aumenta, ni disminuye el termino, que multiplica, ò que divide (pues $1 \times a = a = \frac{a}{1}$) assi su Logarithmo debe ser un termino, que ni junto à otro lo aumente, ni quitado de él lo disminuya, y esto solo conviene à 0, pues $a + 0 = a$, $a - 0 = a$.

3º. *Que el Logarithmo de qualquier Fraccion propria debe ser una Quantidad negativa, ò Logarithmo negativo*; ya porque como la tal Fraccion siempre disminuye la quantidad, por quien se multiplica, assi su Logarithmo siem-

siempre debe disminuir la quantidad à quien se añade, lo que solo conviene à las quantidades negativas; ya tambien porque como la Fraccion propria es menor, que la unidad, tambien su Logarithmo debe ser menor, que el Logarithmo de la unidad, que es o, por consiguiente quantidad negativa; y se ve en las dos Séries propuestas, que el Logarithmo de $\frac{x^5}{x^7} = \frac{1}{x^2}$, es $5a - 7a = -2a$.

4º. Que los Logarithmos nos ahorran mucho trabajo en las multiplicaciones, y divisiones de quantidades Numericas; pues supuesto que en las *Tablas de Logarithmos* están los Logarithmos, y al lado las quantidades Numericas, que les corresponden, habiendo de multiplicar dos, ò mas quantidades, *sumense sus Logarithmos, y la suma será el Logarithmo del producto*; con que encontrando el numero, que corresponde à dicha suma, tendrémos el producto de las quantidades dadas.

5º. De la misma suerte para dividirlas, *busquense sus Logarithmos en las Tablas, quitese del Logarithmo del Dividendo el del Divisor, la Diferencia será el Logarithmo del Quociente*; luego buscando en las Tablas el numero, que corresponde à esta *Diferencia*, tendrémos el quociente de dichas quantidades.

6º. Como toda Fraccion propria, ò impropria es igual al quociente del Numerador dividido

vidido por el Denominador, *quitando del Logarithmo del Numerador el del Denominador, la Resta será el Logarithmo de la Fraccion*; de aquí es, que para encontrar el Logarithmo de un numero mixto, es buen medio reducir dicho numéro à Fraccion impropria.

7°. Que como para encontrar un Quarto Geometrico Proporcional, multiplicamos segundo por tercero, y dividimos este producto por el primero, assi tomando sus Logarithmos correspondientes, *si de la suma de los Logarithmos del segundo, y tercer termino, quitamos el Logarithmo del primero, la Diferencia será el Logarithmo del Quarto proporcional*; por la misma razon, en la Proporcion continua, *si del duplo del Logarithmo del segundo, se quita el Logarithmo del primero, la Diferencia será el Logarithmo del Tercero.*

285 Mas supuesto qualquier termino A, cuyo Logarithmo sea a, el Logarithmo de A^2 será $a + a = 2a$, el de A^3 será $a + a + a = 3a$, el de A^4 será $4a$, en general el de A^n será na. De donde se saca la Regla general: *Que el Logarithmo de qualquier Potencia es igual al de la Raiz multiplicado por el Exponente de la Potencia*, pues $na = n \times a$; y se ve en las dos Séries propuestas, en que para encontrar el Logarithmo de x^7, se multiplica el Logarithmo a de la Raiz x por el Exponente 7 de la Potencia 7ª. y da por su Logarithmo $a \times 7 = 7a$.

Esta

Esta Regla se estiende no solo à las Potencias de A, que se forman por multiplicacion A^2, A^3, &c. sino tambien à las Potencias negativas de A, esto es $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A^2}$, &c. Pues el Logarithmo de $\frac{1}{A} = 0 - a = -a$, el de $\frac{1}{A^2} = -2a$, en general el de $\frac{1}{A^n}$ es $-na$, pero $\frac{1}{A^n} = A^{-n}$, y $-na = -n \times a$; luego el Logarithmo de qualquier Potencia (sea positiva, ò negativa, perfecta, ò imperfecta) es el de la Raiz multiplicado por el Exponente de la Potencia.

286 *Si el Logarithmo de una Potencia de* A, *como* A^m *es* q, *el Logarithmo de la Raiz* A *será* $\frac{q}{m}$; porque el Logarithmo de la Raiz debe ser una quantidad, que multiplicada por el Exponente de la Potencia, dé por producto el Logarithmo de la Potencia, segun lo dicho antes, y solo $\frac{q}{m}$ es la tal quantidad, pues $\frac{q}{m} \times m = \frac{qm}{m} = q$, Logarithmo de la Potencia A^m. De donde se saca la Regla general: *Que el Logarithmo de la Raiz es igual al de la Potencia, dividido por el Exponente de la Raiz.*

Assi en las dos Séries propuestas, dado el Logarithmo de x^7, es à saber $7a$, si lo dividimos por el Exponente de la Potencia 7, que es el mismo que de la Raiz *septima*, dará $\frac{7a}{7} = a$ Lo-

Logarithmo de x, que es *ſeptima* Raiz de x^7; porque ſi el Logarithmo de la Raiz multiplicado por el Exponente de la Potencia da el Logarithmo de la Potencia, deshaciendo lo hecho, eſto es, dividiendo eſte producto por el Exponente de la Raiz, dará el Logarithmo de la Raiz.

287 De ahí es, que ſi tenemos el Logarithmo de qualquier quantidad, y lo dividimos por 2, *Exponente de la Raiz quadrada*, ò tomamos ſu *mitad*, que es lo miſmo, eſta mitad ſerá el Logarithmo de la Raiz quadrada; ſi lo dividimos por 3, *Exponente de la Raiz cubica*, ò tomamos ſu *tercio*, tendrémos el Logarithmo de ſu Raiz cubica; en general ſi ſe divide por n, ſea n Entero, ò Quebrado, tendrémos el Logarithmo de la Raiz n de la tal quantidad; y como un medio proporcional es la Raiz quadrada del producto de los extremos, *ſi ſe toma la mitad de la ſuma de los Logarithmos de los extremos, tendrémos el Logarithmo del medio proporcional.*

Pues he aquí por medio de los Logarithmos un modo facil, y breve para ſacar las Raices qualeſquiera de qualquier Quantidad Numerica, y para levantar qualeſquiera quantidades à qualquier Potencia; porque *multiplicando el Logarithmo de la Raiz por el Exponente de la Potencia que ſe buſca, ſe tiene el Logarithmo de la tal Potencia, y dividiendo el Logarithmo*

de

de la quantidad por el Exponente de la Raiz que ſe buſca, ſe tiene el Logarithmo de la Raiz.

288 Si entre cada dos terminos de las dos Séries propueſtas arriba

$$\div\!\div 1 : x : x^2 : x^3 : x^4 : x^5 : \&c.$$
$$\div\ 0 . a . 2a . 3a . 4a . 5a . \&c.$$

metemos quantos quiera medios proporcionales, es cierto, que ſiendo igual el numero de medios proporcionales entre los de la Progreſſion Arithmetica, que entre los de la Geometrica, tambien los unos ſerán los Logarithmos de los de la otra, y aſſi les conviéne la Definicion general de los Logarithmos.

Mas como en toda Série la Razon que tienen entre sí dos terminos, es compueſta de todas las Razones intermedias, y ſi eſtas Razones ſon iguales, como ſiempre lo ſon en la Progreſſion, la Razon Compueſta es tantuplicada de cada una de ellas, quanto es el numero de Razones de que ſe compone; ſi entre los dos terminos primeros 1, x metemos nueve medios proporcionales, la Razon de 1 à x ſerá *decuplicada* de la Razon de 1 al primer medio proporcional, que ſiendo como *Medida* de las demás Razones, ſerá el *Ratio modularis*, ò el *Modulo* de toda la Progreſsion.

289 Si por conſiguiente entre los dos primeros terminos de la Progreſsion Arithmetica 0, a metemos otros nueve terminos Arithmetico Proporcionales, tambien la Razon de

0 . a

o . *a* ſerá compueſta de todas las Razones intermedias, y *a* ſerá tantuplo del primer medio proporcional Arithmetico, quantupla ſea la Compueſta 1 : *x*, reſpecto de la primera Razon. Y aſſi los Logarithmos ſerán los *Exponentes de las Razones, que tengan ſus reſpectivos terminos reſpecto de la unidad*, lo que propriamente exprime la palabra latinizada *Logarithmus* del Griego *Logoon arythmos*, que es decir *Numero de Razones* de que ſe compone.

Pero como es libre meter mas, ò menos medios entre dos terminos dados; de ahí vienen los diferentes Syſtemas de Logarithmos, que por conſiguiente tendrán diferentes *Baſes Logarithmicas*; pues *x* ſerá tanto mayor Potencia reſpecto del primer medio proporcional, quantos mas medios proporcionales haya entre 1, y *x*, por conſiguiente *x* tiene mayor Razon reſpecto de él.

En la Geometría, en donde las quantidades ſe exprimen por Lineas, como en la Algebra por Letras, los Logarithmos ſe repreſentan por las *Abſciſſas*, y los Numeros correſpondientes por las *Ordenadas* de una Curva, que por eſſo ſe llama *Logarithmica*; ò bien los Logarithmos ſe exprimen por las *Areas* comprehendidas entre las Ordenadas, y los Numeros por las reſpectivas *Abſciſſas*, como en los *Logarithmos Hyperbolicos*.

CAPI-

CAPITULO XIX.

Systema de los Logarithmos de Briggs.

ARTICULO PRIMERO.

Propriedades generales de estos Logarithmos.

290 LA Doctrina hasta aquí explicada es general en toda especie de Logarithmos. Vamos al particular, y expliquemos el Systema de Briggs el mas util en la practica, y de cuyas Tablas de Logarithmos nos servimos comunmente.

Este Systema toma por Série Geometrica la de las Potencias de 10, y por Série Arithmetica la de los Numeros Naturales, es à saber,

$\div\!\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : &c.

$\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . &c.

Puestas estas dos Séries, atendiendo à la Doctrina dada, tomando en la Série Geometrica medios proporcionales entre 1, y 10, y en la Série Arithmetica entre 0, y 1, estos serán Logarithmos de aquellos. Encontrados pues los Logarithmos de los numeros medios entre 1, y 10, se encontrarán los de sus múltiplices; tomando el Logarith-

mo de 2, doblandolo, tendrémos el Logarithmo de su Quadrado 4, triplicandolo, el de su Cubo, finalmente multiplicandolo por el Exponente de qualquier Potencia, tendrémos el Logarithmo de qualquier Potencia de 2. De la misma suerte los de las Potencias de los otros numeros medios entre 1, y 10.

Mas encontrados por exemplo los Logarithmos de 2, y de 3, sumandolos, encontrarémos el Logarithmo de 2 × 3 = 6; y assi sumando los Logarithmos de qualesquiera numeros simples, la suma será el Logarithmo de su Producto.

Assi se han ido formando los Logarithmos, que, arreglados à los numeros por su orden, forman las que llamamos *Tablas de Logarithmos*, en donde en la una columna están los Numeros, y en la otra à su lado están los Logarithmos correspondientes.

291 Vista pues la construccion de estas Tablas, tenganse bien presentes las dos Séries propuestas, para comprehender las propriedades de estos Logarithmos.

En este Systema se ve 1º. *Que cada Logarithmo es el Exponente de la Potencia de* 10, *que es su termino correspondiente*. Assi porque $100 = 10^2$, el Logarithmo de 100, *Quadrado* de 10, es 2, Exponente del Quadrado; $1000 = 10^3$, por esso su Logarithmo es 3, &c. por consiguiente todos los Numeros Quebrados,

ò

ó Enteros se podrán mirar como *tales Potencias de* 10, *quales exponen sus Logarithmos.*

Se ve 2°. *Que toda quantidad possible entre* 0, *y* 1, *como son todas las Fracciones proprias, ha de tener Logarithmo negativo*; porque, como hemos dicho, siendo la tal quantidad menor que la unidad, su Logarithmo ha de ser tambien menor, que el Logarithmo de 1, esto es, menor que 0, por consiguiente quantidad negativa.

En orden à estos *Logarithmos negativos*, quales son todos los de las Fracciones proprias, se ha de advertir, que aunque la quantidad, que es Logarithmo de una Fraccion, sea absolutamente negativa, *se exprime en quantidades parte positivas, parte negativas*; excediendo no obstante las negativas. Sea por exemplo el Logarithmo de una Fraccion esta quantidad $-\frac{3}{10} = 0 - .3$; assi la expression es toda negativa, pero puesta de esta suerte $-1 + .7$ ($= 0 - .3$) la expression es parte negativa, que es la del Entero -1, y parte positiva $+.7$, que es la Fraccion decimal. Pues de esta suerte se exprimen los Logarithmos negativos, en quienes el *Entero* es negativo, y la *Parte decimal* es toda positiva, lo que se ha de tener bien presente, para quando se hayan de sumar Logarithmos de Fracciones.

3°. *Que todos los numeros possibles Enteros, ó Quebrados, que median entre* 1, *y* 10 *han de*

tener por Logarithmo una Fraccion pura; pues eſte Logarithmo ha de ſer uno de los medios proporcionales Arithmeticos entre o, y 1, por conſiguiente *mayor* que o, y *menor* que 1.

Eſtas Fracciones en los Logarithmos ſe ponen por *Decimales*, que ſiempre, como hemos dicho, ſon poſitivas, y ſolo llegan comunmente haſta ſiete figuras, aunque ſe podrian eſtender à mas, para mayor preciſion, y ſe ſeparan con un puntico de la integral, aunque eſta ſeparacion muchas veces ſe omite, por ſuponerſe.

4°. *Que todo numero Entero, ò Quebrado, que medie entre* 10, *y* 100, *debe tener por Logarithmo* 1 + *una Fraccion*; pues el Logarithmo del tal numero debe ſer un medio Arithmetico proporcional entre 1, y 2, aſſi mayor que 1, y menor que 2. De la miſma ſuerte todo numero medio entre 100, y 1000 debe tener por Logar. 2 + una Fraccion. Diſcurraſe aſſi en todas las Potencias perfectas de 10.

292 De lo dicho ſe ve, que tales Logarithmos conſtan de Entero, y Quebrado; el *Entero* ſe llama *Châracteriſtica*, el *Quebrado*, ò la Fraccion decimal ſe llama *Mantiſſa*. Por exemplo en el Logarithmo de 4001, que es 3.6021686, la Châracteriſtica es el Entero 3, la Mantiſſa es la Fraccion decimal .6021686.

La Châracteriſtica tiene una propriedad mui util, y es, *que ſiempre contiene tantas unidades*

dades como cifras de Enteros, menos una, tiene el numero, respecto de quien con la Fraccion decimal es Logarithmo. Assi en el Exemplo propuesto la Châracteristica 3 contiene *tres* unidades; luego su numero debe contener *quatro* cifras de Enteros, y se ve que 4001 las tiene: de donde à la sola vista de la Châracteristica podemos inferir el numero de cifras de Enteros, de que consta su respectivo termino. Y al contrario à la vista del numero de cifras de Enteros de que conste la quantidad, cuyo Logarithmo buscamos, podemos inferir quantas unidades debe contener su Châracteristica. Assi al ver que el numero 4001 consta de *quatro* cifras de Enteros, infiero que la Châracteristica de su Logarithmo solo debe contener *tres* unidades, y assi ha de ser 3.

Algunos, como Saunderson, proponen esta Regla con terminos, que se estienden ya à la Châracteristica de los Logarithmos de los Enteros, ya à la de los Logarithmos de Fracciones reducidas à Decimales. Y es: *Que si la quantidad dada consta de Enteros, en la Châracteristica de su Logarithmo habrá tantas unidades, quantas cifras en el numero dado preceden à la cifra de unidades; y si el numero dado consta de solas Decimales, en la Châracteristica de su Logarithmo hai tantas unidades negativas, como ceros de Enteros, y Decimales preceden à la primera cifra significativa.*

Assi

Assi como en esta quantidad 34567.89 al 7, que es la cifra de unidades, le preceden *quatro* cifras, la Châracteristica de su Logarithmo debe ser 4. En las Fracciones, como en esta quantidad fraccional 0.0345678 9 al 3, que es la primera cifra *significativa*, le preceden *dos* ceros, la Châracteristica de su Logarithmo debe tener dos unidades negativas, y assi ha de ser — 2.

Fundados en esta advertencia en algunas *Tablas de Logarithmos* omiten las Châracteristicas, porque se infieren à la sola vista del numero de cifras de Enteros, de que consta la quantidad, cuyo Logarithmo buscamos.

293 Como es mui corriente en el Calculo el Multiplicar, y el Dividir por 10, por 100, por 1000, &c. en este Systema de Briggs se logra con grande expedicion *con solo añadir* (para el Multiplicar) ò *quitar* (para el Dividir) *à la Châracteristica del Logarithmo del Multiplicando, ò del Dividendo*, 1, 2, 3, *&c.* (que son los Exponentes de las Potencias de 10, por quienes multiplicamos, ò dividimos) *dexando intactas las Decimales.*

Por exemplo hayase de Multiplicar 101 por 10. Haciendo la operacion por Logarithmos, sumese el Logarithmo de 101, es à saber 2.0043214 con el de 10, que es 1.0000000; pues porque las Decimales del Logarithmo de 10, y de sus Potencias perfectas son ceros, que nada

nada añaden, se hace facilmente la suma, añadiendo al Logarithmo del Multiplicando el Entero del Logarithmo del Multiplicador, que es 1, y assi el Logarithmo del producto será = 3.0043214. Si se hubiesse de multiplicar por 100, se habria de añadir à la Characteristica 2; si por 1000, añadase 3, &c. Al contrario para dividir por dichas quantidades, habria de quitar 1, 2, 3, &c. de la Characteristica del Dividendo.

294 Algunas veces en este punto de Logarithmos ocurre tambien el *Complemento Logarithmico*, que otros llaman *Complemento Arithmetico*, que no es otra cosa, *que la Diferencia entre un Logarithmo dado, y el Logarithmo de la decima Potencia de* 10, esto es 10. Y se encuentra facilmente este Complemento, poniendo baxo de cada cifra del Logarithmo dado, quanto dicha cifra dista de 9, y en la ultima significativa quanto dista de 10, comenzando esta operacion desde la izquierda. Esto no es otra cosa, que quitar de esta quantidad 10 el Logarithmo dado. Assi el Complemento Arithmetico del Logarithmo (de 456) 2.6589648 es 7.3410352.

ARTI-

ARTICULO II.

De algunas cosas que se ofrecen en la practica de los Logarithmos de Briggs.

295 ENtendidas las propriedades del Systema de los Logarithmos de Briggs, basta para Elementos entender su uso, y allanar algunas dificultades, que mas frequentemente suelen ocurrir en la practica, supuesto que otros han trabajado por nosotros, formandonos sus Tablas. En las Tablas de Logarithmos están los Numeros Naturales Enteros, comenzando de 1 adelante, y segun ellas sean más, ò menos completas, se estienden à mayor, ò menor numero, unas llegan hasta 10000, otras hasta 20000, &c. En otra columna à su lado están los Logarithmos respectivos.

296 Esto supuesto, las dificultades, que suelen ocurrir, son 1º. Dado un *Numero mayor, que el mayor de las Tablas*, encontrar su Logarithmo; y al contrario dado un *Logarithmo mayor, que el mayor de las Tablas*, encontrar su Numero correspondiente.

2º. Dado un *Numero Intermedio* à los de las Tablas, encontrar su Logarithmo; y al contrario dado un *Logarithmo Intermedio à los de*

de las Tablas, encontrarle el Numero, que le competa.

3º. Dado un *Numero menor, que el menor de las Tablas*, encontrar ſu Logarithmo; y al contrario dado un *Logarithmo menor, que el menor de las Tablas*, encontrar el Numero, que le correſponda.

Todas eſtas dificultades allanarémos en los Problemas ſiguientes.

297 PROBLEMA I. *Dado un Numero mayor, que el mayor de las Tablas, encontrar ſu Logarithmo.*

Si el Numero dado no excede à 10000000.

Regla. *Tomeſe de las Tablas el Logarithmo, que correſponde à las quatro primeras figuras del Numero dado, la Diferencia entre eſte Logarithmo, y el del Numero immediato ſuperior multipliqueſe por las otras figuras, que quedan del tal Numero, y quitando de eſte producto ácia la derecha tantas figuras, quantas hai mas que quatro en el Numero dado, añadanſe las otras al Logarithmo encontrado de las quatro primeras figuras, la Suma ſerá el Logarithmo que ſe buſca, dandole la Châracteriſtica correſpondiente.*

Aſſi buſcando el Logarithmo de un Numero de *ſiete* figuras, como en el Exemplo, multipliqueſe la Diferencia entre el Logarithmo de las *quatro* primeras figuras, y el del immediato ſuperior por las *tres* ultimas cifras del Numero dado; ſi el producto tubieſſe ſiete,

aña-

añadiendo las quatro primeras figuras de este producto al Logarithmo de las quatro primeras del Numero dado, la Suma será el Logarithmo que se busca, dandole por Châracteristica la que le pertenezca por el numero de figuras, de que conste la quantidad dada.

Por exemplo. Busquese el Log. de 1012659. La operacion es la siguiente.

Logar. de	1012	3.0051805
	1013	3.0056094
Diferencia		4289
Resto de figuras		x 659
Producto		2826,451
+ *Logar. de* 1012		0051805
Logar. de 1012659 ...		6.0054631

Se pone por Châracteristica 6, por constar la quantidad dada de *siete* figuras.

298 PROBLEMA II. *Dado un Logarithmo mayor, que el mayor de las Tablas, encontrar su Numero correspondiente.*

Si el Logarithmo dado fuesse la *Suma* de otros Logarithmos, que en las Tablas se encuentren (lo que se conoce quitando del Logarithmo dado otro Logarithmo de las Tablas) el producto de los Numeros correspondientes á estos Logarithmos será el Numero buscado.

Mas si el tal Logarithmo fuesse *Multiplice* de al-

algun Logarithmo de las Tablas, el Numero buſcado ſerá la reſpectiva Potencia del Numero, de cuyo Logarithmo es multiplo el Logárithmo dado, eſto es, el *Quadrado* ſi fueſſe el *Duplo*, el *Cubo* ſi fueſſe el *Triplo*, &c.

Finalmente tomeſe eſta Regla general.

Regla. *Quiteſe de la Châracteriſtica del Logarithmo dado quantas unidades ſe quiera, con tal que quede inferior al Logarithmo mayor, que en las Tablas ſe encuentre. Buſqueſele al Logarithmo aſsi diſminuido ſu Numero correſpondiente en las Tablas, el qual multiplicado por la Potencia de* 10, *cuyo Exponente ſon las unidades quitadas de la Châracteriſtica* (eſto es por 100 ſi ſe han quitado 2, por 1000 ſi 3, &c.) *el producto ſerá el Numero buſcado.*

Dado el Logarithmo 4.3010300 para hallar ſu Numero, la operacion es la ſiguiente.

Del Logarithmo dado	4.3010300
Quitando por exemplo	3.
Reſta, y Logarithmo	1.3010300
Cuyo Numero es	20
Multiplicado por 10^3 = ...	1000
Producto, ò Numero buſcado	20000

La razon es evidente, porque quitando unidades à la Châracteriſtica del Logarithmo dado, ſe divide ſu correſpondiente Numero (aunque no ſe conozca) por 10, 100, 1000, &c.

&c. luego multiplicando despues el quociente por el mismo Divisor, el producto será el Numero buscado.

299 PROBLEMA III. *Dado un Numero Intermedio à los de las Tablas, encontrar su Logarithmo.*

Estando en las Tablas los Numeros Enteros, el Intermedio debe ser mixto de Entero, y Fraccion Comun, ò Decimal.

Esto supuesto, ò bien reduciendo la quantidad mixta à Fraccion Comun impropria, *quitese del Logarithmo del Numerador el del Denominador, y la resta será el Logarithmo de la quantidad mixta dada*; ò bien *reduciendo la parte fraccional à Fraccion Decimal* (sino lo está) *busquese el Logarithmo de toda la quantidad, como si todas las figuras fuessen de Enteros, y quitando de la Châracteristica tantas unidades, quantas figuras de Decimales habia en el Numero dado, la resta será el Logarithmo que se busca.*

Busquese el Logarithmo de $4\frac{9}{12}$.

Por el primer methodo.	*Por el segundo methodo.*
$4\frac{9}{12} = \frac{57}{12}$	$4\frac{9}{12} = 4.75$
Log. de 57) 1.755874	*Log. de* 475) 2.676693
—*Log. de* 12) 1.079181	*Quitando* . . 2.
Log. de $\frac{57}{12}$) 0.676693	*Log. de* 4.75) 0.676693

300 Algunas veces (aunque no con tanta exactitud) considerando que $4\frac{9}{12}$ es mayor que

que 4, y menor que 5, su Logarithmo tambien ha de ser mayor que el de 4, y menor que el de 5; por consiguiente será la suma del Logarithmo de 4, y de la *Diferencia* con que el Logarithmo buscado excede al tal Logarithmo. Esta *Diferencia* se toma proporcional à las diferencias de los Numeros, y de los respectivos Logarithmos de esta suerte:

Como la Diferencia (1) *de los* Numeros *de las* Tablas
A la Diferencia *de sus* Logarithmos:
Assi la Diferencia ($\frac{9}{12}$) *entre el* Numero dado, *y* su immediato inferior
A un Quarto Proporcional,

el qual añadido al Logarithmo del Numero immediato inferior (4) da el Logarithmo que se busca.

301 PROBLEMA IV. *Dado un Logarithmo Intermedio à los de las Tablas, encontrar su Numero.*

Estando en las Tablas los Logarithmos de todos los Enteros, sus Intermedios han de ser Logarithmos de quantidades mixtas de Entero, y Fraccion Comun, ò Decimal; por lo tanto, ò bien *añadase al Logarithmo dado qualquier otro Logarithmo, el Numero que corresponda à esta suma será el Numerador, el Numero que corresponda al Logarithmo que se añade,*

de, será el Denominador de la Fraccion Comun impropria, igual al Numero que se busca; ò bien *añadanse quantas unidades se quiera à la Châracteristica del Logarithmo dado, y del Numero que corresponde à este nuevo Logarithmo, separense para Decimales tantas figuras, quantas unidades se hayan añadido à la Châracteristica del Logarithmo dado.*

Estas Reglas son las Inversas del Problema antecedente, y en sus Exemplos se puede hacer la operacion, tomando por Logarithmo dado el de la Fraccion impropria.

Assi dado el Logar. Intermedio 0.1383027 su Numero se encontrará por las siguientes operaciones.

Por el primer methodo.		*Por el segundo methodo.*	
Logar. dado	0.138302	*Log. dado*	0.138302
+*Log. de* 40)	1.602060	*Añadiendo*	3
Log. de 55)	1.740362	*Log. de* 1375)	3.138302
Num. buscado $\frac{55}{40}$	$= 1\frac{3}{8}$	*Num. busc.* 1.375	$= 1\frac{3}{8}$

302 PROBLEMA V. *Dado un Numero Inferior à los de las Tablas, encontrar su Logarithmo*; y al contrario *Dado un Logarithmo Inferior à los de las Tablas, encontrar su Numero.*

Como en las Tablas están los Numeros Enteros, comenzando desde 1 ácia arriba, el Numero inferior à los de las Tablas debe ser menor que 1; por consiguiente Fraccion Propria

pria Comun, ò Decimal, y como son los mismos los methodos para buscar los Logarithmos de qualesquiera *Fracciones*, sean Proprias, sean Impropias, assi en Comunes, como Decimales, las mismas Reglas que se han dado para encontrar los Logarithmos de las Fracciones Impropias, sirven tambien para las Proprias, y las mismas que se han dado en el Prob. 4. para encontrar los Numeros que corresponden à los Logarithmos Intermedios, sirven para que dado un Logarithmo Inferior à los de las Tablas, se les encuentre su Numero, pues son precisamente las Inversas à las del Prob. 3.

303 Para lo qual tengase presente esta observacion, que en el Systema de los Logarithmos de Briggs, exceptuando las Châracteristicas (que se conocen por el numero, y calidad de figuras, de que la quantidad conste) los mismos son los Logarithmos de las Fracciones Decimales proprias, ò impropias, que los de los Enteros, que consten de las mismas figuras, lo que depende de la Multiplicacion, y Division de Potencias de 10, que en este Systema de Logarithmos se hace por las Châracteristicas. Assi el Logarithmo de 475 (que es 2.6766936) menos 1, será el de 47.5; menos 2, será el de 4.75; assimismo el Logarithmo de 0.475, será — 1.6766936.

ARTI-

ARTICULO III.

De la Arithmetica Logarithmica.

304 HEmos visto los Principios en que se fundan ya los Logarithmos en comun, ya los de Briggs en particular; pero como los Principiantes gustan de tener las Reglas puestas en limpio, y confirmadas para su inteligencia con algunos Exemplos, pongo aquí la *Arithmetica Logarithmica*, para cuya inteligencia se ha de tener presente, que el Calculo por los Logarithmos es en substancia el mismo, que el Calculo de las Potencias por medio de los Exponentes.

El methodo de encontrar en las Tablas los Logarithmos de los Numeros Enteros depende del modo, con que las Tablas mismas están arregladas, el qual se suele explicar en los Prolegomenos, que las preceden. Las de Mr. Rivard solo llegan à 20000, las de Sherwin, no mas abultadas que las de Mr. Rivard, pueden servir hasta 10 millones, esto es, *para todo Entero, que se exprima por siete figuras.*

El modo de servirse de ellas está en sus Prolegomenos en idioma Inglés; pero si el tiem-

tiempo, y las circunſtancias neceſſarias para ello me favorecen, eſpero poderlas reimprimir para el uſo de nueſtros Eſpañoles, poniendo ſus excelentes Prolegomenos en nueſtro idioma, pues neceſſitamos de unas buenas Tablas manuales en Eſpaña.

Las operaciones que ſe pueden hacer por medio de los Logarithmos, ſon *Multiplicar*, y *Dividir*; por conſiguiente tambien lo que de eſtas operaciones depende, es à ſaber, encontrar un *Medio*, un *Tercero*, un *Quarto proporcional*, levantar un Numero à *qualquier Potencia*, y extraher de qualquier Numero dado *qualquier Raiz*. Los Principios, en que ſe fundan las Reglas para eſtas operaciones, eſtán ya dadas en el Capitulo precedente, por eſſo las omitiré aquí.

Arithmetica Logarithmica de los Enteros.

305 PROBLEMA I. *Multiplicar por medio de los Logarithmos dos, ò mas Numeros entre sí.*

Regla. *Sumenſe los Logarithmos de los factores, y la Suma ſerá el Logarithmo del Producto* (num. 284, 4$^{o.}$)

Hayaſe de multiplicar 485 por 978.

	2.6857417	.. *Log. del Multip*$^{do.}$	485
	2.9903389	.. *Log. del Multip*$^{dor.}$	978
Suma	5.6760806	.. *Log. del Producto*	47[illegible]30

306 PROBL. II. *Dividir un Numero por otro.*

Regla. *Quitese del Logarithmo del Dividendo el del Divisor, la Resta será el Logarithmo del Quociente* (num. 284, 5°.)

Hayase de dividir 19035 por 423.

4.2795529	.. *Log. del Dividendo*	19035
2.6263404	.. *Log. del Divisor*	423
Resta 1.6532125	.. *Log. del Quociente* =	45

307 PROBL. III. *Encontrar un Medio Geometrico Proporcional entre dos terminos dados.*

Regla. *Sumense los Logarithmos de los terminos dados, y la mitad de esta Suma será el Logarithmo del Medio Proporcional* (num. 287.)

Hayase de encontrar un Medio Proporcional entre 9, y 729.

0.9542425	.. *Log. de* 9
2.8627275	.. *Log. de* 729
Suma 3.8169700	
Mitad 1.9084850	.. *Log. de* 81,

que es Medio Proporcional entre 9, y 729.

Assi el doble del Logarithmo del Medio Proporcional será igual à la Suma de los Logarithmos de los Extremos.

308 PROBLEMA IV. *Encontrar un Tercero Proporcional à dos terminos dados.*

Regla. *Del doble del Logarithmo del Segundo quitese el Logarithmo del Primero, la Resta será el Logar. del Tercero Proporcional* (n. 284, 7°.)

Ha-

Hayase de encontrar un Tercero Proporcional à 70, y 4900.

3.6901961 ... *Logar. de* 4900
7.3803922 ... *Su doble*
1.8450980 ... *Logar. de* 70

Resta 5.5352942 ... *Logar. de* 343000.
que es Tercero Proporcional à 70, y 4900.

309 PROBLEMA V. *Encontrar un Quarto Proporcional à tres terminos dados.*

Regla. *De la Suma de los Logarithmos del Segundo, y Tercero quitese el Logarithmo del Primero, la Resta será el Logarithmo del Quarto Proporcional* (num. 284, 7°.)

En este Problema consiste el principal uso de los Logarithmos, que es para la *Regla de Proporcion.*

EXEMPLO.

Si 60 *Hombres* ganan 45 *Libras*, 86 quanto ganarán?

En Numeros $60 : 45 :: 86 : \frac{86 \times 45}{60} = 64.5.$

En Logar. 1.6532125 .. *Log. de* 45
1.9344985 .. *Log. de* 86

Suma 3.5877110 .. *Log. de* 3870 *Prod.*
1.7781513 .. *Log. de* 60

Resta 1.8095597 .. *Log. de* 64.5 *Q. Prop.*

Si la Regla de Proporcion fuesse *Inversa, de la Suma de los Logarithmos del Primero, y Se-*

Segundo quitese el Logarithmo del Tercero, la Resta será el Logar. del Quarto Proporcional.

Si la Regla de Proporcion fuesse *Compuesta*, se han de sumar los Logarithmos de las causas con los Logarithmos de las respectivas circunstancias, para tener los Logarithmos de los terminos correspondientes.

Algunas veces, especialmente los Authores Ingleses, en vez de *quitar* un Logarithmo de otro, *añaden* su *Complemento Arithmetico*, despreciando despues en la Suma tantas *Decenas* quantos Complementos Arithmeticos se han añadido, y el resultado viene à ser el mismo que si se hubiesse quitado el Logarithmo, que por el comun methodo se habia de quitar, logrando con esto, que en el obrar por Logarithmos jamás se haya de practicar otra Regla, que el Sumar.

EXEMPLO.

4 *Hombres* levantan 9 *Arrobas* de peso, quantas levantarán 12 *Hombres*?

En Numeros $4 : 9 :: 12 : \frac{12 \times 9}{4} = 27.$

Por el methodo comun.	*Por el Complemento Arithm.*
Log. de 9)0.9542425	*Comp. de* 4)9.3979400
Log. de 12)1.0791812	*Log. de* 9)0.9542425
L. de 108)2.0334237	*Log. de* 12)1.0791812
Log. de 4)0.6020600	*Suma* . . . 11.4313637
Log. de 27)1.4313637	*Menos* . . . 10.
	Log. de 27)1.4313637

PRO-

310 PROBLEMA VI. *Levantar un termino dado à qualquier Potencia.*

Regla. *Multipliquese el Logarithmo del termino dado por el Exponente de la Potencia que se busca, el Producto será el Logarithmo de la tal Potencia* (num. 285.)

Hayase de levantar el Numero 32 à Quadrado, ò segunda Potencia.

1.5051500 ... *Log. de* 32.
× 2 ... *Exponente de la Potencia.*
3.0103000 ... *Log. de* $1024 = 32^2$.

Multiplicando el Logarithmo del Numero dado por 3, se levantaria à *Cubo*; multiplicandolo por *n*, se levantaria à la Potencia *n*.

311 PROBLEMA VII. *Sacar qualquier Raiz de un Numero dado.*

Regla. *Dividasele su Logarithmo por el Exponente de la Raiz, el Quociente será el Logarithmo de la Raiz que se busca* (num. 286.)

Hayase de sacar la Raiz Cubica de 5451776.

6.7365380 (*Log. de* 5451776
3 (*Exponente de la Raiz Cubica.*
Quoc. 2.2455126 (*Log. de* $176 = \sqrt[3]{5451776}$.

Assimismo dividiendo dicho Logarithmo por 4, el Quociente será el Logarithmo de la Raiz quarta, y en general dividiendolo por *n*, el Quociente será el de la Raiz *n*.

Arith-

Arithmetica Logarithmica de las Fracciones Comunes, y Decimales.

312 PROBLEMA I. *Encontrar el Logarithmo de una Fraccion Comun.*

Regla. *Del Logarithmo del Numerador quitese el Logarithmo del Denominador, la Resta será el Logarithmo de la Fraccion* (n. 284, 6°.)

Hayase de encontrar el Logarithmo de $\frac{25}{496}$.

1.3979400 ... *Log. de* 25
2.6954817 ... *Log. de* 496

Resta = $\bar{2}$.7024583 ... *Log. de* $\frac{25}{496}$.

Como toda quantidad mixta de Entero, y Fraccion comun, como $36\frac{2}{3}$, se puede reducir à Fraccion comun impropria, reducida que sea, valdrá tambien en ella la Regla dada. Assi porque $36\frac{2}{3} = \frac{110}{3}$, tambien su Logarithmo será el de 110, es à saber 2.0413927 − 0.4771213 (Logar. de 3) = 1.5642714.

313 PROBLEMA II. *Encontrar el Logarithmo de qualquier Fraccion Decimal pura, ò mixta de Enteros, y Decimales.*

Regla. *Busquese el Logarithmo de la tal quantidad como si todas las cifras fuessen de Enteros, y de su Characteristica quitense tantas unidades, quantas figuras hai de Decimales en la quantidad dada.*

Bus-

Busquese el Logarithmo de 0.00475.

OPERACION.

Log. de 475	2.6766936
Menos	5
Log. de 0.00475 ... —	3.6766936.

Teniendo pues por los Problemas dados los Logarithmos de las Fracciones, assi Comunes, como Decimales, el Calculo, y fin de dichos Logarithmos es el mismo que el de los Enteros, y assi no es necessario repetirlo.

Las *Tablas Logarithmicas* mas frequentes de que tenemos noticia son las Grandes, y Pequeñas de Ulac, las Manuales de Mr. Rivard, impressas en París año 1743, las de Mr. Sherwin, impressas por tercera vez en Londres en 1742. Las de Mr. Rivard son mas claritas, las de Mr. Sherwin son mas completas, aquellas con algunos Prolegomenos, aunque sucintos en Francés, estas exceden notablemente en sus Prolegomenos en Inglés; pero las mejores de todas quantas en Nacion alguna, de que tengamos noticia, han salido, son las de Mr. Guillermo Gardiner, impressas en Londres año 1742, las quales contienen el Canon Logarithmico Numerico, y Trigonometrico, aunque para solos Numeros es excelente el Canon Antilogarithmico de James Dodson Inglés.

CAPI-

CAPITULO XX.

De los Logarithmos Hyperbolicos.

Su Formacion.

314 VIsta la mucha ſemejanza que tienen los Logarithmos en comun con los Exponentes, ò Indices de las Potencias, cuya Raiz ſea la Baſe Logarithmica, para decir algo de los Logarithmos Hyperbolicos, que otros llaman *Logarithmos Naturales*, *Logarithmos de Neper*, ſea la Razon comun de una Progreſſion Geometrica infinitamente proxima à la Razon de Igualdad, ò lo que es lo miſmo, el Exceſſo de a (Baſe Logarithmica) ſobre la unidad ſea infinitamente pequeño, de manera que algunos, ò muchos terminos de la Progreſſion $1, a, a^2, a^3, a^4,$ *&c.* coincidan con los terminos de la Série de los Numeros Naturales 2, 3, 4, 5, &c. los Indices de eſtas Potencias $a, a^2, a^3, a^4,$ *&c.* ſerán los Logarithmos de los Numeros à quienes dichas Potencias igualen, de manera que ſi $a^m = 2$, $a^n = 3$, m, y n ſerán los Logarithmos de 2, de 3, y $m + n$ el Logarithmo de $2 \times 3 = 6$, ſegun la doctrina comun de Logarithmos. Si

Si estos Indices se multiplican, ò se dividen por una misma quantidad, guardarán los Productos, ò Quocientes, que serán los Multiplices, ò las partes semejantes de estos Indices, la misma Razon que ellos; por consiguiente las propriedades generales de los Logarithmos, que provienen de ser los Logarithmos Indices, convendrán tambien à sus Multiplices, ò Submultiplices, que son los Indices multiplicados, ò divididos por una quantidad constante, unos de estos son los que llamamos *Logarithmos Hyperbolicos*, por explicarse por cierta propriedad de la Hyperbola.

315 Esto supuesto, el *Logarithmo Hyperbolico de algun Numero es el Indice, ò Exponente del termino de la Progression Geometrica, que iguala al tal Numero, multiplicado este Indice por el Excesso de la Razon comun de la Progression sobre la unidad.*

Y assi si e es una quantidad infinitamente pequeña, se podrá formar esta Progression

$$1 : (1+e)^1 : (1+e)^2 : (1+e)^3 : (1+e)^4 \ldots (1+e)^n,$$

la Razon Geometrica reinante de esta Progression será $1+e : 1 = 1+e$, y el Excesso de la tal Razon sobre la unidad será $1+e-1=e$, que multiplicado por n, Indice del termino $(1+e)^n$ de la tal Progression, dará ne por Logarithmo Hyperbolico del Numero, à quien $(1+e)^n$ es igual, y assi los Logarithmos Hyperbo-

perbolicos de los terminos de esta Progression Geometrica son los terminos de la Progression Arithmetica, como se vé en estas dos

$$\div\!\div 1 : (1+e)^1 : (1+e)^2 : (1+e)^3 : (1+e)^4 \ldots (1+e)^n$$
$$\div 0 \,.\; 1e \;.\; 2e \;.\; 3e \;.\; 4e \ldots\ldots ne$$

316 Esto supuesto lo particular que hai para la practica en estos Logarithmos (porque las operaciones se hacen como en los de Briggs) es 1°. *Dado el Logarithmo Hyperbolico, encontrar su Numero.* 2°. *Dado el Numero, encontrar su Logarithmo Hyperbolico.* 3°. *Puesta una Tabla de Logarithmos Hyperbolicos hasta un determinado Numero, encontrar los Logarithmos de los Numeros intermedios.* 4°. *Encontrar los Logarithmos Hyperbolicos de los Numeros, que exceden al Mayor de las Tablas.*

317 PROBLEMA I. *Dado el Logarithmo Hyperbolico* (L) *de un Numero* (N), *encontrar este Numero.*

Sea $(1+e)^n$ el termino de la Progression Geometrica igual al tal Numero, esto es $N = (1+e)^n = 1 + ne + n \times \frac{n-1}{2} e^2 + n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} e^3$, *&c.* en donde porque e es quantidad infinitamente pequeña, y Fraccion, será aun mas pequeña e^2, e^3, *&c.* y siendo n mui grande en comparacion de $-1, -2, -3$, &c. sin error sensible se podrán menospreciar, ò juzgar

gar por o los terminos negativos; por consiguiente tendrémos en la Equacion propuesta

$$1 + ne + \frac{n^2 e^2}{2} + \frac{n^3 e^3}{2 \times 3} + \frac{n^4 e^4}{2 \times 3 \times 4}, \&c. = N;$$

pero el Logarithmo Hyperbolico $L = ne$: luego substituyendo L en lugar de ne, L^2 en lugar de n^2e^2, &c. será $1 + L + \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{2 \times 3} + \frac{L^4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{L^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5}, \&c. = N$, el Numero buscado.

318 PROBLEMA II. *Dado un Numero N, encontrarle su Logarithmo Hyperbolico.*

Porque $N = (1 + e)^n$, sacando la Raiz n de entrambas partes, tendrémos $(1 + e) = N^{\frac{1}{n}} = (1 + x)^m$, haciendo $N = 1 + x$, $m = \frac{1}{n}$. Reduciendolo á la larga será $(1 + x)^m = 1 + mx + m \times \frac{m-1}{2} x^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} x^3$, &c. $= 1 + e$, quitando de entrambas partes 1, será $e = mx + m \times \frac{m-1}{2} x^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} x^3$, &c. en la qual Equacion, porque $1 + e = (1 + x)^m$, será m quantidad mui pequeña en comparacion de 1, 2, 3, &c. y assi despreciando m en los factores $m - 1$, $m - 2$, $m - 3$, &c. de los coeficientes, tendrémos $e = mx - \frac{mx^2}{2} + \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^4}{4}$, &c. y dividiendolo todo por

por m, será $\frac{e}{m}$ ($= ne =$ L) $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, *&c.* en la qual siendo dado x, porque se nos da N ($= 1 + x$) se conocerá tambien el valor de la Série, que nos exprime el Logarithmo Hyperbolico del Numero dado N.

319 Pero esta Série, que exprime el valor del Logarithmo Hyperbolico de un Numero dado, aunque buena, y facil, es de poco uso en los Numeros grandes, por ser *divergente*; por lo tanto han discurrido los Mathematicos una Série igualmente facil, pero mas oportuna, por ser siempre *convergente*.

Para esto sea el Numero, cuyo Logarithmo buscamos, $\frac{1}{1-x}$, en la qual expression, por grande que sea el Numero, siempre será x menor que la unidad. Sea à mas de esto $(1+e)^n$ el termino de la Progression Geometrica igual al tal Numero, ò lo que es lo mismo $\frac{1}{1-x} = (1+e)^n$, sacando la Raiz n de entrambas partes, tendrémos $1 + e = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{n}}} = (1-x)^{-\frac{1}{n}} = (1-x)^m$ (haciendo $m = -\frac{1}{n}$) $= 1 - mx + m \times \frac{m-1}{1} x^2 - m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} x^3$ *&c.* en la qual menospreciando m en los factores $m-1$, $m-2$, $m-3$, *&c.* de los

los coeficientes tendrémos $1 + e = 1 - mx - \frac{mx^2}{2} - \frac{mx^3}{3}$, &c. de donde quitando de entrambas partes 1, y dividiendo lo demás por $-m$, resultará $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$, &c. $= \frac{e}{-m} = ne =$ al Logarithmo de $\frac{1}{1-x}$, la qual Série siempre es convergente, por ser siempre x menor que la unidad, por consiguiente Fraccion tanto mas pequeña, quanto mayor es $\frac{1}{1-x} = N$.

Pero advirtiendo, que esta Série $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$, &c. Logarithmo de $\frac{1}{1-x}$, es en todo la misma, excepto la alternacion de Signos, que la de arriba $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, &c. Logarithmo de $1 + x$, si se suman entrambas, su Suma $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7}$, &c. será el Logarithmo del Producto $\frac{1}{1-x} \times (1 + x) = \frac{1+x}{1-x}$; luego haciendo el Entero $N = \frac{1+x}{1-x}$, por consiguiente $x = \frac{N-1}{N+1}$, y si el Numero dado fuesse Fraccion $\frac{P}{Q}$, haciendo $\frac{P}{Q} = \frac{1+x}{1-x}$, sería $x = \frac{P-Q}{P+Q}$, substituyendo en lugar de

de x su valor, tendrémos para la expression de qualquier Logarithmo Hyperbolico, assi de Enteros, como de Quebrados esta Série $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9}$, &c. la qual es siempre convergente, y el valor de x es mucho menor, que en las demás.

320 De todo esto, se pueden sacar Reglas generales para encontrar ya los Logarithmos Hyperbolicos de los Numeros Enteros, ya los de los Quebrados.

Para los Numeros Enteros.

Regla. *Dividase el Numero dado menos* 1 *por el Numero dado mas* 1, *sumense las Potencias impares de este Quociente divididas por los Numeros impares, que son sus Exponentes, y el duplo de esta Suma será el Logarithmo Hyperbolico del Numero dado.*

Para los Numeros Quebrados.

Regla. *Dividase la Diferencia entre Numerador, y Denominador por la Suma del Numerador, y del Denominador, sumense las Potencias impares de este Quociente, divididas por los Numeros impares, que son sus Exponentes, y el duplo de esta Suma será el Logarithmo Hyperbolico de la Fraccion dada.*

Porque, ò bien sea $x = \frac{N-1}{N+1}$, ò bien sea $x = \frac{P-Q}{P+Q}$, siempre la Série $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7}$, &c. $=$ L.

La

La practica de estas Reglas, y aplicacion de esta Série se ve en el Exemplo siguiente.

Busquese el Logarithmo Hyperbolico de 2. Será $N = 2$, $x = \frac{N-1}{N+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$, substituyendo $\frac{1}{3}$ en lugar de x, y sus Potencias en la Série $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7}$, *&c.* tendrémos

$x \ (= \frac{1}{3})$	$= 0.33333333$, :	$1 = 0.33333333$
$x^3 \ (= \frac{1}{9} \times x)$	$= 0.03703703$, :	$3 = 0.01234567$
$x^5 \ (= \frac{1}{9} \times x^3)$	$= 0.00411522$, :	$5 = 0.00082304$
$x^7 \ (= \frac{1}{9} \times x^5)$	$= 0.00045724$, :	$7 = 0.00006532$
$x^9 \ (= \frac{1}{9} \times x^7)$	$= 0.00005080$, :	$9 = 0.00000564$
$x^{11} \ (= \frac{1}{9} \times x^9)$	$= 0.00000564$, :	$11 = 0.00000051$
	Suma de los Quocientes	$= 0.34657351$
	Cuyo duplo	$= 0.69314702$

Será pues el Logarithmo Hyperbolico de 2 (Numero dado) = 0.69314702, &c.

Practica de los Logarithmos Hyperbolicos.

321 Fundado en estas Séries, y Reglas, que hasta aquí hemos dado, calculó Eulero en su Introduccion al Analisi *cap.* 7. los Logarithmos Hyperbolicos desde 1 hasta 10, y fundado en las mismas Mr. John Turner sacó una Tabla breve de los mismos, añadiendo aun las *Centesimas*, la qual comunicó à su ami-

amigo Thomás Simpson, que por ser breve, de suma utilidad, y que no se suele encontrar en lo comun de las Tablas Logarithmicas, pondré aquí para los aficionados al Calculo Integral, ò al Methodo Inverso de las Fluxiones, para quienes especialmente en puntos de Fluxiones de las Exponenciales es del todo necessaria, poniendo tambien dos Problemas, que enseñen el modo de servirse de ella.

Toda la dificultad en servirse de unas Tablas Logarithmicas consiste en buscar los Logarithmos de los Numeros intermedios à los de las Tablas, y los de los Numeros superiores al mayor de los que en las Tablas se encuentren.

322 PROBLEMA I. *Encontrar el Logarithmo Hyperbolico de qualquier Numero Entero, ò Quebrado comprehendido entre* 1, *y* 10.

Si el tal Numero comprehendido entre 1, y 10 fuesse Entero, ò que puramente conste de Entero, y solas *Centesimas*, busquese el tal Numero en la Tabla, y à su lado se le encontrará su Logarithmo correspondiente. Assi si busco el Logarithmo de 2.99, à su lado se encontrará ser 1.0952733; pero si constasse de *Milesimas*, *Diezmilesimas*, *&c.* tomese esta Regla. *Del Numero dado quitese el immediato inferior en la Tabla*; *dividase la Diferencia por la suma de este Numero immediato inferior, y la mitad de la Diferencia misma*; *y añadase*

este

este Quociente al Logarithmo del Numero immediato inferior, esta suma será el Logarithmo Hyperbolico del Numero dado.

Busquese el Logarithmo Hyperbolico de 3.45678. Como este Numero es mayor que 3.45, y menor que 3.46, su Logarithmo se ha de comprehender entre los Logarithmos de estos Numeros. Quitando pues del Numero dado el immediato inferior de la Tabla 3.45, tendrémos 3.45678 — 3.45 = 0.00678, que dividido por 3.45 + 0.00339 = 3.45339, Suma del Numero immediato inferior de la Tabla, y de la mitad de la Diferencia, da por Quociente .0019632, el qual añadido al Logarithmo del Numero immediato inferior de la Tabla 1.2383742 dará 1.2403374, por Logarithmo Hyperbolico de 3.45678.

323 PROBLEMA II. *Encontrar el Logarithmo Hyperbolico de qualquier Numero Entero, ò Quebrado, que exceda al mayor de la Tabla, ò á* 10.

Regla. *Considerense todas sus cifras, excepto la primera, como Decimales, y de esta suerte busquesele el Logarithmo* (que se encontrará, ò en la Tabla, ò por la Operacion del Problema precedente) *añadase al Logarithmo encontrado el Tantuplo del Logarithmo de* 10 (que está en la Tabla) *quantuplo es el Numero de cifras, que se han tomado por Decimales, que en el Numero dado no lo eran, y*

esta suma será el Logarithmo del Numero que se busca.

Busquese el Logarithmo Hyperbolico de 345.678. Considerando todas sus cifras, excepto la primera, como Decimales, tendrémos 3.45678, cuyo Logarithmo, segun el Problema 1, será 1.2403374, à quien añadiendo el *duplo* del Logarithmo de 10 = 2 × 2.3025851 = 4.6051702 (porque se han tomado como Decimales *dos* cifras, que en el Numero dado no lo eran) será 1.2403374 + 4.6051702 = 5.8455076, Logarithmo Hyperbolico de 345.678.

La razon de esta Operacion es, porque tomando *dos* cifras como Decimales, divido el tal Numero por 100, con que añadiendo despues à su Logarithmo el de 100, que es el *duplo* del de 10, vuelvo à multiplicar con los Logarithmos por la misma quantidad, por la qual antes la habia dividido, y assi se queda la quantidad dada con su Logarithmo correspondiente.

De ahí se ve, que en este Systema para Multiplicar, ò Dividir por 10, ò sus Potencias se ha de añadir, ò quitar el tantuplo de 2.3025851 (Log. de 10), quantuplo es respeto de la unidad el Exponente de la Potencia de 10, por la qual se multiplica, ò divide.

324 Si alguno no tubiesse à mano esta Tabla, ni quisiera fatigarse en encontrar el Lo-

Logarithmo Hyperbolico de algun Numero sumando la Série arriba propuesta, se podrá valer de la Razon, que tienen entre sí los Logarithmos de Briggs con los Hyperbolicos, pues todos los Systemas de Logarithmos tienen entre sí una Razon constante.

La Razon que tienen los Logarithmos de Briggs con los Hyperbolicos, y los Hyperbolicos con los de Briggs se ve en estas dos Proporciones:

Log. de Briggs : *Log. Hyperbolico* :: 1 : 2.3025851
Log. Hyperbolico : *Log. de Briggs* :: 1 : 0.4342944

luego tendrémos

Log. Hyperbolico = *Log. de Briggs* x 2.3025851
Log. de Briggs = *Log. Hyperbolico* x 0.4342944

Assi dado algun Numero para encontrarle su Logarithmo Hyperbolico, multipliquese el Logarithmo de Briggs del tal Numero por 2.3025851, el Producto será el Logarithmo Hyperbolico del dicho Numero. Para encontrar el Logarithmo de Briggs de algun Numero dado, multipliquese el Hyperbolico del mismo Numero por 0.4342944, el Producto será el Logarithmo de Briggs, que corresponde al tal Numero.

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
1.01	.0099503	1.34	.2926696	1.67	.5128236
1.02	.0198026	1.35	.3001045	1.68	.5187937
1.03	.0295588	1.36	.3074846	1.69	.5247285
1.04	.0392207	1.37	.3148107	1.70	.5306282
1.05	.0487902	1.38	.3220834	1.71	.5364933
1.06	.0582689	1.39	.3293037	1.72	.5423242
1.07	.0676586	1.40	.3364722	1.73	.5481214
1.08	.0769610	1.41	.3435897	1.74	.5538851
1.09	.0861777	1.42	.3506568	1.75	.5596157
1.10	.0953102	1.43	.3576744	1.76	.5653138
1.11	.1043600	1.44	.3646431	1.77	.5709795
1.12	.1133287	1.45	.3715635	1.78	.5766133
1.13	.1222176	1.46	.3784364	1.79	.5822156
1.14	.1310283	1.47	.3852624	1.80	.5877866
1.15	.1397619	1.48	.3920420	1.81	.5933268
1.16	.1484200	1.49	.3987761	1.82	.5988365
1.17	.1570037	1.50	.4054651	1.83	.6043159
1.18	.1655144	1.51	.4121096	1.84	.6097655
1.19	.1739533	1.52	.4187103	1.85	.6151856
1.20	.1823215	1.53	.4252677	1.86	.6205764
1.21	.1906203	1.54	.4317824	1.87	.6259384
1.22	.1988508	1.55	.4382549	1.88	.6312717
1.23	.2070141	1.56	.4446858	1.89	.6365768
1.24	.2151113	1.57	.4510756	1.90	.6418538
1.25	.2231435	1.58	.4574248	1.91	.6471032
1.26	.2311117	1.59	.4637340	1.92	.6523251
1.27	.2390169	1.60	.4700036	1.93	.6575200
1.28	.2468600	1.61	.4762341	1.94	.6626879
1.29	.2546422	1.62	.4824261	1.95	.6678293
1.30	.2623642	1.63	.4885800	1.96	.6729444
1.31	.2700271	1.64	.4946962	1.97	.6780335
1.32	.2776317	1.65	.5007752	1.98	.6830968
1.33	.2851789	1.66	.5068175	1.99	.6881346
1.34	.2926696	1.67	.5128236	2.00	.6931472

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
2.01	.6981347	2.34	.8501509	2.67	.9820784
2.02	.7030974	2.35	.8544153	2.68	.9858167
2.03	.7080357	2.36	.8586616	2.69	.9895411
2.04	.7129497	2.37	.8628899	2.70	.9932517
2.05	.7178397	2.38	.8671004	2.71	.9969486
2.06	.7227059	2.39	.8712933	2.72	1.0006318
2.07	.7275485	2.40	.8754687	2.73	1.0043015
2.08	.7323678	2.41	.8796267	2.74	1.0079579
2.09	.7371640	2.42	.8837675	2.75	1.0116008
2.10	.7419373	2.43	.8878912	2.76	1.0152306
2.11	.7466879	2.44	.8919980	2.77	1.0188473
2.12	.7514160	2.45	.8960880	2.78	1.0224509
2.13	.7561219	2.46	.9001613	2.79	1.0260415
2.14	.7608058	2.47	.9042181	2.80	1.0296194
2.15	.7654678	2.48	.9082585	2.81	1.0331844
2.16	.7701082	2.49	.9122826	2.82	1.0367368
2.17	.7747271	2.50	.9162907	2.83	1.0402766
2.18	.7793248	2.51	.9202827	2.84	1.0438040
2.19	.7839015	2.52	.9242589	2.85	1.0473189
2.20	.7884573	2.53	.9282193	2.86	1.0508216
2.21	.7929925	2.54	.9321640	2.87	1.0543120
2.22	.7975071	2.55	.9360933	2.88	1.0577902
2.23	.8020015	2.56	.9400072	2.89	1.0612564
2.24	.8064758	2.57	.9439058	2.90	1.0647107
2.25	.8109302	2.58	.9477893	2.91	1.0681530
2.26	.8153648	2.59	.9516578	2.92	1.0715836
2.27	.8197798	2.60	.9555114	2.93	1.0750024
2.28	.8241754	2.61	.9593502	2.94	1.0784095
2.29	.8285518	2.62	.9631743	2.95	1.0818051
2.30	.8329091	2.63	.9669838	2.96	1.0851892
2.31	.8372475	2.64	.9707789	2.97	1.0885619
2.32	.8415671	2.65	.9745596	2.98	1.0919233
2.33	.8458682	2.66	.9783261	2.99	1.0952733
2.34	.8501509	2.67	.9820784	3.00	1.0986123

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
3.01	1.1019400	3.34	1.2059707	3.67	1.3001916
3.02	1.1052568	3.35	1.2089603	3.68	1.3029127
3.03	1.1085626	3.36	1.2119409	3.69	1.3056264
3.04	1.1118575	3.37	1.2149127	3.70	1.3083328
3.05	1.1151415	3.38	1.2178757	3.71	1.3110318
3.06	1.1184149	3.39	1.2208299	3.72	1.3137236
3.07	1.1216775	3.40	1.2237754	3.73	1.3164082
3.08	1.1249295	3.41	1.2267122	3.74	1.3190856
3.09	1.1281710	3.42	1.2296405	3.75	1.3217558
3.10	1.1314021	3.43	1.2325605	3.76	1.3244189
3.11	1.1346227	3.44	1.2354714	3.77	1.3270749
3.12	1.1378330	3.45	1.2383742	3.78	1.3297240
3.13	1.1410330	3.46	1.2412685	3.79	1.3323660
3.14	1.1442227	3.47	1.2441545	3.80	1.3350010
3.15	1.1474024	3.48	1.2470323	3.81	1.3376291
3.16	1.1505720	3.49	1.2499017	3.82	1.3402504
3.17	1.1537315	3.50	1.2527629	3.83	1.3428648
3.18	1.1568811	3.51	1.2556160	3.84	1.3454723
3.19	1.1600209	3.52	1.2584609	3.85	1.3480731
3.20	1.1631508	3.53	1.2612978	3.86	1.3506671
3.21	1.1662709	3.54	1.2641266	3.87	1.3532544
3.22	1.1693813	3.55	1.2669475	3.88	1.3558351
3.23	1.1724821	3.56	1.2697605	3.89	1.3584091
3.24	1.1755733	3.57	1.2725655	3.90	1.3609765
3.25	1.1786549	3.58	1.2753627	3.91	1.3635373
3.26	1.1817271	3.59	1.2781521	3.92	1.3660916
3.27	1.1847899	3.60	1.2809338	3.93	1.3686394
3.28	1.1878434	3.61	1.2837077	3.94	1.3711807
3.29	1.1908875	3.62	1.2864740	3.95	1.3737156
3.30	1.1939224	3.63	1.2892326	3.96	1.3762440
3.31	1.1969481	3.64	1.2919836	3.97	1.3787661
3.32	1.1999647	3.65	1.2947271	3.98	1.3812818
3.33	1.2029722	3.66	1.2974631	3.99	1.3837912
3.34	1.2059707	3.67	1.3001916	4.00	1.3862943

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
4.01	1.3887912	4.34	1.4678743	4.67	1.5411590
4.02	1.3912818	4.35	1.4701758	4.68	1.5432981
4.03	1.3937663	4.36	1.4724720	4.69	1.5454325
4.04	1.3962446	4.37	1.4747630	4.70	1.5475625
4.05	1.3987168	4.38	1.4770487	4.71	1.5496879
4.06	1.4011829	4.39	1.4793292	4.72	1.5518087
4.07	1.4036429	4.40	1.4816045	4.73	1.5539252
4.08	1.4060969	4.41	1.4838746	4.74	1.5560371
4.09	1.4085449	4.42	1.4861396	4.75	1.5581446
4.10	1.4109869	4.43	1.4883995	4.76	1.5602476
4.11	1.4134230	4.44	1.4906543	4.77	1.5623462
4.12	1.4158531	4.45	1.4929040	4.78	1.5644405
4.13	1.4182774	4.46	1.4951487	4.79	1.5665304
4.14	1.4206957	4.47	1.4973883	4.80	1.5686159
4.15	1.4231083	4.48	1.4996230	4.81	1.5706971
4.16	1.4255150	4.49	1.5018527	4.82	1.5727739
4.17	1.4279160	4.50	1.5040774	4.83	1.5748464
4.18	1.4303112	4.51	1.5062971	4.84	1.5769147
4.19	1.4327007	4.52	1.5085119	4.85	1.5789787
4.20	1.4350845	4.53	1.5107219	4.86	1.5810384
4.21	1.4374626	4.54	1.5129269	4.87	1.5830939
4.22	1.4398351	4.55	1.5151272	4.88	1.5851452
4.23	1.4422020	4.56	1.5173226	4.89	1.5871923
4.24	1.4445632	4.57	1.5195132	4.90	1.5892352
4.25	1.4469189	4.58	1.5216990	4.91	1.5912739
4.26	1.4492691	4.59	1.5238800	4.92	1.5933085
4.27	1.4516138	4.60	1.5260563	4.93	1.5953389
4.28	1.4539530	4.61	1.5282278	4.94	1.5973653
4.29	1.4562867	4.62	1.5303947	4.95	1.5993875
4.30	1.4586149	4.63	1.5325568	4.96	1.6014057
4.31	1.4609379	4.64	1.5347143	4.97	1.6034198
4.32	1.4632553	4.65	1.5368672	4.98	1.6054298
4.33	1.4655675	4.66	1.5390154	4.99	1.6074358
4.34	1.4678743	4.67	1.5411590	5.00	1.6094379

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
5.01	1.6114359	5.34	1.6752256	5.67	1.7351891
5.02	1.6134300	5.35	1.6770965	5.68	1.7369512
5.03	1.6154200	5.36	1.6789639	5.69	1.7387102
5.04	1.6174060	5.37	1.6808278	5.70	1.7404661
5.05	1.6193882	5.38	1.6826882	5.71	1.7422189
5.06	1.6213664	5.39	1.6845453	5.72	1.7439687
5.07	1.6233408	5.40	1.6863989	5.73	1.7457155
5.08	1.6253112	5.41	1.6882491	5.74	1.7474591
5.09	1.6272778	5.42	1.6900958	5.75	1.7491998
5.10	1.6292405	5.43	1.6919391	5.76	1.7509374
5.11	1.6311994	5.44	1.6937790	5.77	1.7526720
5.12	1.6331544	5.45	1.6956155	5.78	1.7544036
5.13	1.6351056	5.46	1.6974487	5.79	1.7561323
5.14	1.6370530	5.47	1.6992786	5.80	1.7578579
5.15	1.6389967	5.48	1.7011051	5.81	1.7595805
5.16	1.6409365	5.49	1.7029282	5.82	1.7613002
5.17	1.6428726	5.50	1.7047481	5.83	1.7630170
5.18	1.6448050	5.51	1.7065646	5.84	1.7647308
5.19	1.6467336	5.52	1.7083778	5.85	1.7664416
5.20	1.6486586	5.53	1.7101878	5.86	1.7681496
5.21	1.6505798	5.54	1.7119944	5.87	1.7698546
5.22	1.6524974	5.55	1.7137979	5.88	1.7715567
5.23	1.6544112	5.56	1.7155981	5.89	1.7732559
5.24	1.6563214	5.57	1.7173950	5.90	1.7749523
5.25	1.6582280	5.58	1.7191887	5.91	1.7766458
5.26	1.6601310	5.59	1.7209792	5.92	1.7783364
5.27	1.6620303	5.60	1.7227666	5.93	1.7800242
5.28	1.6639260	5.61	1.7245507	5.94	1.7817091
5.29	1.6658182	5.62	1.7263316	5.95	1.7833912
5.30	1.6677068	5.63	1.7281094	5.96	1.7850704
5.31	1.6695918	5.64	1.7298840	5.97	1.7867469
5.32	1.6714733	5.65	1.7316555	5.98	1.7884205
5.33	1.6733512	5.66	1.7334238	5.99	1.7900914
5.34	1.6752256	5.67	1.7351891	6.00	1.7917594

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
6.01	1.7934247	6.34	1.8468787	6.67	1.8976198
6.02	1.7950872	6.35	1.8484547	6.68	1.8991179
6.03	1.7967470	6.36	1.8500283	6.69	1.9006138
6.04	1.7984040	6.37	1.8515994	6.70	1.9021075
6.05	1.8000582	6.38	1.8531680	6.71	1.9035989
6.06	1.8017098	6.39	1.8547342	6.72	1.9050881
6.07	1.8033586	6.40	1.8562979	6.73	1.9065751
6.08	1.8050047	6.41	1.8578592	6.74	1.9080600
6.09	1.8066481	6.42	1.8594181	6.75	1.9095425
6.10	1.8082887	6.43	1.8609745	6.76	1.9110228
6.11	1.8099267	6.44	1.8625285	6.77	1.9125011
6.12	1.8115621	6.45	1.8640801	6.78	1.9139771
6.13	1.8131947	6.46	1.8656293	6.79	1.9154509
6.14	1.8148247	6.47	1.8671761	6.80	1.9169226
6.15	1.8164520	6.48	1.8687205	6.81	1.9183921
6.16	1.8180767	6.49	1.8702625	6.82	1.9198594
6.17	1.8196988	6.50	1.8718021	6.83	1.9213247
6.18	1.8213182	6.51	1.8733394	6.84	1.9227877
6.19	1.8229351	6.52	1.8748743	6.85	1.9242486
6.20	1.8245493	6.53	1.8764069	6.86	1.9257074
6.21	1.8261608	6.54	1.8779371	6.87	1.9271641
6.22	1.8277699	6.55	1.8794650	6.88	1.9286186
6.23	1.8293763	6.56	1.8809906	6.89	1.9300710
6.24	1.8309801	6.57	1.8825138	6.90	1.9315214
6.25	1.8325814	6.58	1.8840347	6.91	1.9329696
6.26	1.8341801	6.59	1.8855533	6.92	1.9344157
6.27	1.8357763	6.60	1.8870696	6.93	1.9358598
6.28	1.8373699	6.61	1.8885837	6.94	1.9373017
6.29	1.8389610	6.62	1.8900954	6.95	1.9387416
6.30	1.8405496	6.63	1.8916048	6.96	1.9401794
6.31	1.8421356	6.64	1.8931119	6.97	1.9416152
6.32	1.8437191	6.65	1.8946168	6.98	1.9430489
6.33	1.8453002	6.66	1.8961194	6.99	1.9444805
6.34	1.8468787	6.67	1.8976198	7.00	1.9459101

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
7.01	1.9473376	7.34	1.9933387	7.67	2.0373166
7.02	1.9487632	7.35	1.9947002	7.68	2.0386195
7.03	1.9501866	7.36	1.9960599	7.69	2.0399207
7.04	1.9516080	7.37	1.9974177	7.70	2.0412203
7.05	1.9530275	7.38	1.9987736	7.71	2.0425181
7.06	1.9544449	7.39	2.0001278	7.72	2.0438143
7.07	1.9558604	7.40	2.0014800	7.73	2.0451088
7.08	1.9572739	7.41	2.0028305	7.74	2.0464016
7.09	1.9586853	7.42	2.0041790	7.75	2.0476928
7.10	1.9600947	7.43	2.0055258	7.76	2.0489823
7.11	1.9615022	7.44	2.0068708	7.77	2.0502701
7.12	1.9629077	7.45	2.0082140	7.78	2.0515563
7.13	1.9643112	7.46	2.0095553	7.79	2.0528408
7.14	1.9657127	7.47	2.0108949	7.80	2.0541237
7.15	1.9671123	7.48	2.0122327	7.81	2.0554049
7.16	1.9685099	7.49	2.0135687	7.82	2.0566845
7.17	1.9699056	7.50	2.0149030	7.83	2.0579624
7.18	1.9712993	7.51	2.0162354	7.84	2.0592388
7.19	1.9726911	7.52	2.0175661	7.85	2.0605135
7.20	1.9740810	7.53	2.0188950	7.86	2.0617866
7.21	1.9754689	7.54	2.0202221	7.87	2.0630580
7.22	1.9768549	7.55	2.0215475	7.88	2.0643278
7.23	1.9782390	7.56	2.0228711	7.89	2.0655961
7.24	1.9796212	7.57	2.0241929	7.90	2.0668627
7.25	1.9810014	7.58	2.0255131	7.91	2.0681277
7.26	1.9823798	7.59	2.0268315	7.92	2.0693911
7.27	1.9837562	7.60	2.0281482	7.93	2.0706530
7.28	1.9851308	7.61	2.0294631	7.94	2.0719132
7.29	1.9865035	7.62	2.0307763	7.95	2.0731719
7.30	1.9878743	7.63	2.0320878	7.96	2.0744290
7.31	1.9892432	7.64	2.0333976	7.97	2.0756845
7.32	1.9906103	7.65	2.0347056	7.98	2.0769384
7.33	1.9919754	7.66	2.0360119	7.99	2.0781907
7.34	1.9933387	7.67	2.0373166	8.00	2.0794415

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
8.01	2.0806907	8.34	2.1210632	8.67	2.1598687
8.02	2.0819384	8.35	2.1222615	8.68	2.1610215
8.03	2.0831845	8.36	2.1234584	8.69	2.1621729
8.04	2.0844290	8.37	2.1246539	8.70	2.1633230
8.05	2.0856720	8.38	2.1258479	8.71	2.1644718
8.06	2.0869135	8.39	2.1270405	8.72	2.1656192
8.07	2.0881534	8.40	2.1282317	8.73	2.1667653
8.08	2.0893918	8.41	2.1294214	8.74	2.1679101
8.09	2.0906287	8.42	2.1306098	8.75	2.1690536
8.10	2.0918640	8.43	2.1317967	8.76	2.1701959
8.11	2.0930984	8.44	2.1329822	8.77	2.1713367
8.12	2.0943306	8.45	2.1341664	8.78	2.1724763
8.13	2.0955613	8.46	2.1353491	8.79	2.1736146
8.14	2.0967905	8.47	2.1365304	8.80	2.1747517
8.15	2.0980182	8.48	2.1377104	8.81	2.1758874
8.16	2.0992444	8.49	2.1388889	8.82	2.1770218
8.17	2.1004691	8.50	2.1400661	8.83	2.1781550
8.18	2.1016923	8.51	2.1412419	8.84	2.1792868
8.19	2.1029140	8.52	2.1424163	8.85	2.1804174
8.20	2.1041341	8.53	2.1435893	8.86	2.1815467
8.21	2.1053529	8.54	2.1447609	8.87	2.1826747
8.22	2.1065702	8.55	2.1459312	8.88	2.1838015
8.23	2.1077861	8.56	2.1471001	8.89	2.1849270
8.24	2.1089998	8.57	2.1482676	8.90	2.1860512
8.25	2.1102128	8.58	2.1494339	8.91	2.1871742
8.26	2.1114243	8.59	2.1505987	8.92	2.1882959
8.27	2.1126343	8.60	2.1517622	8.93	2.1894163
8.28	2.1138428	8.61	2.1529243	8.94	2.1905355
8.29	2.1150499	8.62	2.1540851	8.95	2.1916535
8.30	2.1162555	8.63	2.1552445	8.96	2.1927702
8.31	2.1174596	8.64	2.1564026	8.97	2.1938856
8.32	2.1186622	8.65	2.1575593	8.98	2.1949998
8.33	2.1198634	8.66	2.1587147	8.99	2.1961128
8.34	2.1210632	8.67	2.1598687	9.00	2.1972245